한양대학교 2016학년도 신입학전형 수시

상 경 계	모 의 논 술 예 시 답 안	2번

1. $p=1$일 때, $y=(x-a)^1=x-a$이고, $y'=1$이므로 성립한다. $p=k$일 때, 성립한다고 가정하면, $y=(x-a)^{k+1}=(x-a)^k(x-a)$의 도함수는 $y'=k(x-a)^{k-1}\cdot(x-a)+(x-a)^k\cdot 1=(k+1)(x-a)^k$ 이므로 $p=k+1$일 때 역시 성립한다.

2. $m_1(x)=f'(x)$, $m_2(x)=\dfrac{f(x)-0}{x-a}=\dfrac{f(x)}{x-a}$, $m_3(x)=\dfrac{0-f(x)}{b-x}=\dfrac{f(x)}{x-b}$이다.

$g(x)=f'(x)(x-a)(x-b)+pf(x)(x-b)+qf(x)(x-a)$라 하면, 다항함수 $y=g(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $g(a)=pf(a)(a-b)$, $g(b)=qf(b)(b-a)$이므로, $g(a)g(b)<0$이다. 따라서 중간값의 정리에 의해, $g(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 (a,b)안에 적어도 하나 존재한다.

$g(c)=f'(c)(c-a)(c-b)+pf(c)(c-b)+qf(c)(c-a)=0$이고, $f'(c)+p\dfrac{f(c)}{c-a}+q\dfrac{f(c)}{c-b}=0$이므로,

$m_1(c)+pm_2(c)+qm_3(c)=0$ 가 성립한다.

3. $h(a)=h(b)=0$이므로, 적당한 양의 정수 p,q와 $f(a)\neq 0$, $f(b)\neq 0$인 다항함수 $y=f(x)$가 존재해서, $h(x)=f(x)(x-a)^p(x-b)^q$가 된다. 이 때, 중간값의 정리에 의해 $y=f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 항상 양의 함수값을 갖거나 또는 항상 음의 함수값을 갖는다.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= f'(x)(x-a)^p(x-b)^q+f(x)p(x-a)^{p-1}(x-b)^q+f(x)(x-a)^p q(x-b)^{q-1} \\
&= (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}(f'(x)(x-a)(x-b)+pf(x)(x-b)+qf(x)(x-a))
\end{aligned}
$$

$g(x)=f'(x)(x-a)(x-b)+pf(x)(x-b)+qf(x)(x-a)$ 라 하면 소문항 2번에서 $g(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 (a,b)안에 적어도 하나 존재하고, 이때 $h'(c)=0$이다.