한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1번

1. 영역 D의 넓이는 $2z\times 2w-zw=3zw$이고 $z+w=10$이므로 그 넓이는 $3z(10-z)=h(z)$이고 $h'(z)=30-6z=0$에서 $z=5$일 때 가장 넓은 영역이 된다.

2. $c>0$인 경우:
i) $f(0)=1<2w$이면 영역이 2부분으로 나누어진다.
$c<0$인 경우:
ii) $f(0)=1\le w$이면 영역이 2부분으로 나누어진다.
iii) $f(z)=2^{cz}>w$이고 $f(2z)=2^{2cz}<2w$이면 영역이 2부분으로 나누어진다.
iv) $f(0)=1>w$이고 $f(z)=2^{cz}\le w$이면 영역이 3부분으로 나누어진다.

3. iv)에서 $2w\ge f(0)=1>w$이고 $f(z)=2^{-z}\le w$이면 경우:
한 부분의 영역의 넓이는
$$\int_z^{2z}2^{-x}dx=\frac{2^{-x}}{-\ln 2}\Big|_z^{2z}=\frac{2^{-2z}-2^{-z}}{-\ln 2}=\frac{2^{-z}-2^{-2z}}{\ln 2}$$ 이고
또 다른 부분의 넓이는
$$\int_0^{-\log_2 w}(2^{-z}-w)dx=\frac{2^{-x}}{-\ln 2}-wx\Big|_0^{-\log_2 w}$$
$$=\frac{w}{-\ln 2}-\frac{w\log_2 w}{-1}-\frac{1}{-\ln 2}=\frac{w-1}{-\ln 2}-\frac{w\log_2 w}{-1}=\frac{1-w}{\ln 2}+w\log_2 w$$ 이고 -- (1)
나머지 한 부분은 $3zw-\frac{2^{-z}-2^{-2z}+1-w}{\ln 2}-w\log_2 w$이다.

iv)에서 $2w>f(0)=1$이고 $f(z)=2^{-z}\le w$이면 경우:
한 부분의 영역의 넓이는
$$\int_z^{2z}2^{-x}dx=\frac{2^{-x}}{-\ln 2}\Big|_z^{2z}=\frac{2^{-2z}-2^{-z}}{-\ln 2}=\frac{2^{-z}-2^{-2z}}{\ln 2}$$ 이다.
또 다른 한 부분의 영역의 넓이를 구하기 위하여
$$\int_0^{-\log_2 2w}(2^{-z}-2w)dx=\frac{2^{-x}}{-\ln 2}-2wx\Big|_0^{-\log_2 2w}$$
$$=\frac{2w}{-\ln 2}-\frac{2w\log_2 2w}{-1}-\frac{1}{-\ln 2}=\frac{2w-1}{-\ln 2}-\frac{2w\log_2 2w}{-1}=\frac{1-2w}{\ln 2}+2w\log_2 2w$$ -- (2)이므로
(1)−(2)를 하면 또 다른 한 부분의 영역의 넓이가 된다.
따라서 그 영역의 넓이는
$$\frac{1-w}{\ln 2}+w\log_2 w-\left(\frac{1-2w}{\ln 2}+2w\log_2 2w\right)=\frac{w}{\ln 2}-(w\log_2 w+2w)$$ 이고
나머지 한 부분은 $3zw-\left(\frac{2^{-z}-2^{-2z}}{\ln 2}\right)-\left(\frac{w}{\ln 2}-(w\log_2 w+2w)\right)=3zw-\left(\frac{2^{-z}-2^{-2z}+w}{\ln 2}\right)+w\log_2 w+2w$이다.

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 논술고사

자 연 계	모 의 논 술 예 시 답 안	2번

1. 제시문 (가)에 주어진 조건에 의해, 모든 실수 x에 대해

$$f'(x)=\frac{\pi}{4}f(x+2)$$

가 성립한다. 그러므로,

$$\int_0^2 xf(x+2)dx=\frac{4}{\pi}\int_0^2 xf'(x)dx=\frac{4}{\pi}([xf(x)]_0^2-\int_0^2 f(x)dx)$$

그런데, $[xf(x)]_0^2=2f(2)=2$이고, 또한 제시문 (가)의 조건들을 다시 이용하면

$$-f(2)=f(-2)=\frac{\pi}{4}\int_2^0 f(t)dt=-\frac{\pi}{4}\int_0^2 f(t)dt$$

이므로 $\int_0^2 f(t)dt=\frac{4}{\pi}$이므로, $\int_0^2 xf(x+2)dx=\frac{4}{\pi}(2-\frac{4}{\pi})=\frac{8}{\pi}(1-\frac{2}{\pi})$이다.

2. $f'(x)=\frac{\pi}{4}f(x+2)$가 성립하므로 $f(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하다.

그런데 $f(x+2)$는 함수 $x+2$와 $f(x)$의 합성함수이므로 제시문 (나)에 의해

$$f''(x)=(\frac{\pi}{4}f(x+2))'=\frac{\pi}{4}(f(x+2))'=\frac{\pi}{4}f'(x+2)=(\frac{\pi}{4})^2f(x+4)$$

가 성립한다. 즉 $f''(x)$는 모든 실수 x에 대해 존재하고 그 값은 $(\frac{\pi}{4})^2f(x+4)$이다.

3. $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x)$라 두면 $f(x)$는 연속이고 $f(x)$의 그래프는 원점에 대해 대칭이다.

또한 $f(2)=1$을 만족한다. 더 나아가

$$\int_2^{x+2}\sin(\frac{\pi}{4}x)\,dx=[-\frac{4}{\pi}cos(\frac{\pi}{4}x)]_2^{x+2}=-\frac{4}{\pi}cos(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2})+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\pi}sin(\frac{\pi}{4}x)$$

그러므로, $\frac{\pi}{4}\int_2^{x+2}\sin(\frac{\pi}{4}x)\,dx=\sin(\frac{\pi}{4}x)$. 즉, $f(x)=\frac{\pi}{4}\int_2^{x+2}f(t)dt$,

따라서 함수 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x)$는 제시문 (가)의 조건을 모두 만족한다.