한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**모 의 논 술 예 시 답 안**	1번

(1) $P(a)=a^n-a^n=0$이므로 $P(x)=(x-a)Q(x)$가 성립하는 다항식 $Q(x)$가 존재하고 $Q(x)=\sum_{j=0}^{n-1}a_jx^j$라 두고

$P(x)=(x-a)Q(x)$의 양변의 계수를 비교하면 $Q(x)=a^{n-1}+a^{n-2}x+\cdots+ax^{n-2}+x^{n-1}$이다.

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(a^{n-1}+\cdots+x^{n-1})}{x-a}=na^{n-1}$이다.

(2) $g(x)=x^n$이라두자

(ㄱ) $n+k\geq 0$인 경우

$g(h(x))=x^{n+k}$이고 양변을 $x=a$에서 미분하면,

$g'(h(a))h'(a)=(n+k)a^{n+k-1}$이고 $g'(h(a))=n\,h(a)^{n-1}=n\,a^{\frac{(n+k)(n-1)}{n}}$이다.

따라서 $h'(a)=\frac{n+k}{n}a^{n+k-1-\frac{(n+k)(n-1)}{n}}=\frac{n+k}{n}a^{\frac{k}{n}}$이다.

(ㄴ) $n+k<0$인 경우 $-m=n+k$라 두면

$g(h(x))=x^{n+k}=x^{-m}$이고 따라서 $x^mg(h(x))=1$이고 양변을 $x=a$에서 미분하면,

$ma^{m-1}g(h(a))+a^mg'(h(a))h'(a)=0$이고 $g'(h(a))=n\,h(a)^{n-1}=n\,a^{\frac{-m(n-1)}{n}}$이다.

따라서 $h'(a)=-\frac{ma^{m-1}g(h(a))}{a^mg'(h(a))}=-\frac{m}{n}a^{-1+n+k+\frac{m(n-1)}{n}}=\frac{n+k}{n}a^{\frac{k}{n}}$이다.

(3) $h(x)=e^{\ln h(x)=e^{\frac{n+k}{n}\ln x}}$ 이므로

$h'(x)=e^{\frac{n+k}{n}\ln x}\frac{n+k}{n}\frac{1}{x}=\frac{n+k}{n}x^{\frac{n+k}{n}-1}$이다.

따라서 $h'(a)=\frac{n+k}{n}a^{\frac{k}{n}}$이다.

(4) 유리수 r에 대하여 모든 유리수는 $\frac{m}{n}$ $((m,n)=1,\,n>0)$로 나타낼 수 있고 $m-n=k$라 두면 $r=\frac{n+k}{n}$이므로

(2)와 (3)의 관점에서 $x=a$에서 미분계수를 구하면 모두 $h'(a)=ra^{r-1}$인 것을 알 수 있다.

유리수가 아닌 실수 r에 대하여는 (2)의 방법을 적용하여 풀 수 없고 (3)의 방법으로 풀면

$h(x)=e^{\ln h(x)=e^{r\ln x}}$ 이므로 $h'(x)=e^{r\ln x}r\frac{1}{x}=rx^{r-1}$이다.

따라서 $h'(a)=ra^{r-1}$이다.

자 연 계	한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 **모 의 논 술 예 시 답 안**	2번

1. A마을과 B마을을 초점으로 하고 두 마을까지의 거리의 합이 $5t$인 지점들로 이루어지는 타원을 생각하자. 타원의 안쪽에 있는 지역은 이 사람이 t시간 안에 들렀다가 B마을에 도착하는 것이 가능하고 이 타원의 밖에 있는 지역은 t시간 안에 도달했다가 여행을 마칠 수 없다. 따라서, A마을과 B마을을 초점으로 하고 이 두 마을까지의 거리의 합이 $5t$인 타원의 안쪽이다.

2. 문항 1의 타원은 t가 커질수록 중심이 두 마을의 중간지점을 중심으로 하고 반지름 $\frac{5}{2}t$인 원과 비슷해지므로 $A(t) \approx \pi(\frac{5}{2}t)^2$이다. $\lim_{t \to \infty} \frac{A(t)}{t^2} = \frac{25}{4}\pi$.

3. 촛점 사이의 거리가 10km, $2d = 20$km인 타원의 넓이이다.

xy-평면에서 촛점 $(-1,0)$, $(1,0)$, $2d = 4$인 타원의 식은 $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3} = 1$이다.

곡선 $y = \sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, $0 \le x \le 2$과 x-축 사이의 넓이 A를 4배한 것이 이 타원의 넓이이다.

$A = \sqrt{3}\int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx$이다. $x = 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$로 치환하면,

$dx = 2\cos\theta$이므로 $A = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

따라서 이 타원의 넓이는 $2\sqrt{3}\pi$이고, 보물이 숨겨져 있을 가능성이 있는 지역의 넓이는 $50\sqrt{3}\pi$ km^2 이다.