한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시

자 연 계 (3)

논 술 예 시 답 안

1번

1. S는 중심이 원점이고 반지름이 1인 원이고, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 모두 원점을 지나는 평면이므로, 교선 $C_1,\ C_2,\ C_3$는 각각의 평면 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$에 놓인 반지름 1인 원이다. 따라서 원판 A의 넓이는 π이다.
평면 $\beta: \sqrt{3}y - z = 0$의 법선벡터는 $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, 평면 $\gamma: -x + \sqrt{2}y = 0$의 법선벡터는 $(-1,\ \sqrt{2},\ 0)$로 하고 두 평면이 이루는 예각을 θ라 하면, $\cos\theta = \dfrac{(0,\ \sqrt{3},\ -1)\cdot(-1,\ \sqrt{2},\ 0)}{|(0,\ \sqrt{3},\ -1)||(-1,\ \sqrt{2},\ 0)|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 (원판 A의 평면 γ위로의 정사영의 넓이) = (원판 A의 넓이)$\times\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$이다.

2. 점 M_1을 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $x^2+y^2+z^2=1,\ z=0,\ z=\sqrt{3}y,\ x>0$을 만족한다. 따라서 M_1은 $(1,\ 0,\ 0)$이고, 같은 방법으로 M_2는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, M_3는 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$이다. <그림1 참조>
세 점 $\mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2,\ \mathrm{M}_3$를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz=1$로 두고 위 좌표들을 대입해 a, b, c 를 구하면, 평면의 방정식은 $x+(\sqrt{3}-\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-1)z=1$이 되고, 따라서 $a+b+c=\sqrt{3}$ 이다.

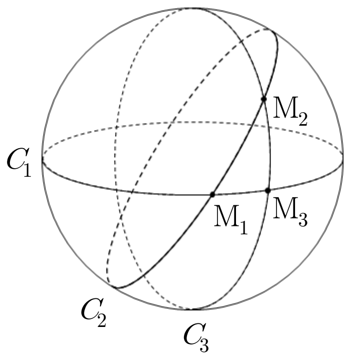

그림 1

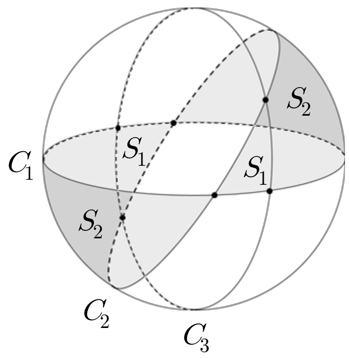

그림 2

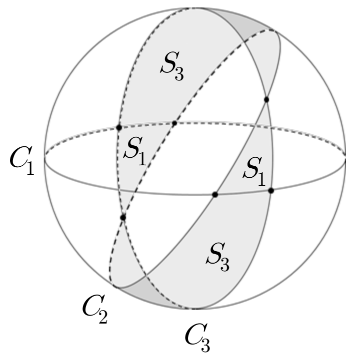

그림 3

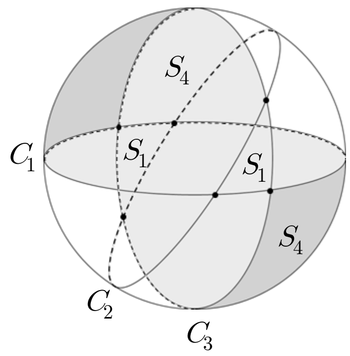

그림 4

3. $C_1,\ C_2,\ C_3$는 S를 8개의 조각으로 나눈다.
평면 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 법선벡터를 각각 $(0,\ 0,\ 1),\ (0,\ \sqrt{3},\ -1),\ (-1,\ \sqrt{2},\ 0)$으로 하면, 문제 1의 방법을 따라 평면 $\alpha,\ \beta$가 이루는 예각은 $\dfrac{\pi}{3}$, 평면 $\beta,\ \gamma$가 이루는 예각은 $\dfrac{\pi}{4}$, 평면 $\gamma,\ \alpha$가 이루는 각은 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

<그림 2 >의 색칠한 부분의 넓이 $=2(S_1+S_2)=2\times4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\dfrac{4}{3}\pi$ 이고, 정리하면 $S_1+S_2=\dfrac{2}{3}\pi$ …… (1)

<그림 3 >의 색칠한 부분의 넓이 $=2(S_1+S_3)=2\times4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\pi$이고, 정리하면 $S_1+S_3=\dfrac{\pi}{2}$ …… (2)

<그림 4 >의 색칠한 부분의 넓이 $=2(S_1+S_4)=2\times4\pi\times\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}=2\pi$이고, 정리하면 $S_1+S_4=\pi$ …… (3)

구면의 넓이는 $2S_1+2S_2+2S_3+2S_4=4\pi$이고, 정리하면 $S_1+S_2+S_3+S_4=2\pi$ …… (4)

(1), (2), (3), (4)로부터 $S_1=\dfrac{\pi}{12},\ S_2=\dfrac{7}{12}\pi,\ S_3=\dfrac{5}{12}\pi,\ S_4=\dfrac{11}{12}\pi$이고, 따라서 가장 작은 조각의 넓이는 $S_1=\dfrac{\pi}{12}$ 이다.

자 연 계 (3)	한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시 **논 술 예 시 답 안**	2번

1. 한 점 $(x_0, f(x_0))$에서 만나면, $0 < x_0 \ \leq 1$이다.

$x = x_0$에서 접선의 기울기가 같아야 하므로 $\frac{1}{x_0} = 2x_0$이며 $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$이다.

$h(x_0) = \frac{1}{2} + b = f(x_0) = 1 - \frac{1}{2} ln\, 2$이므로 $b = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$이다.

따라서 $b < \frac{1}{2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}$일 때 두 점에서 만난다.

2. 한 점 $(x_0, f(x_0))$에서 만나면, $x_0 \ \geq 1$이다.

$x = x_0$에서 접선의 기울기가 같아야 하므로 $-\ln 2 \cdot 2^{x_0} = 2ax_0$이고

$h(x_0) = ax_0^2 + 3 = 3 - 2^{x_0} = f(x_0)$이므로 $x_0 = \frac{2}{\ln 2} > 1$이고, $a = -\frac{(\ln 2)^2 4^{\frac{1}{\ln 2}}}{4}$이다.

따라서 $a < -\frac{(\ln 2)^2 4^{\frac{1}{\ln 2}}}{4} = -\frac{(\ln 2)^2 2^{\frac{2}{\ln 2}}}{4}$일 때 두 점에서 만난다.

3. $F(x) = f(x) - tx^2$라 하면 $F'(x) = f'(x) - 2tx$이다.

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x < 1) \\ -\ln 2 \cdot 2^x & (x > 1) \end{cases}$과 $y = 2tx$의 그래프는 t의 값의 범위에 따라

i) $0 < t \leq \frac{1}{2}$인 경우

$x = 1$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $F(x)$는 $x = 1$에서 극대가 된다.
$g(t) = F(1) = f(1) - t = 1 - t$

ii) $t > \frac{1}{2}$이고 $x < 1$인 경우

$F(x) = f(x) - tx^2$라 하면 $F'(x) = \frac{1}{x} - 2tx = 0$ 이고 $x = \frac{1}{\sqrt{2t}} < 1$

$t > \frac{1}{2}$이고 $x > 1$인 경우 $F'(x)$는 음수이다. $F(x)$는 $x = 1$에서 연속이고

$x = \frac{1}{\sqrt{2t}}$에서 $F'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $x = \frac{1}{\sqrt{2t}} < 1$에서 극댓값이 있다.

$F(\frac{1}{\sqrt{2t}}) = g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\ln(2t))$이다. $g(\frac{e}{2}) = 0$이므로

$$\lim_{t \to \frac{e}{2}} \frac{g(t)}{2t - e} = \frac{1}{2} \lim_{t \to \frac{e}{2}} \frac{g(t) - g(\frac{e}{2})}{t - \frac{e}{2}} = \frac{1}{2} g'(\frac{e}{2}) = -\frac{1}{2e}$$