

1. 조건 (1), (2)를 만족하는 일차 변환을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{에서 } \begin{matrix} 2a + b = 1 \dots \textcircled{1} \\ 2c + d = 2 \dots \textcircled{2} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{에서 } a^2 + c^2 = 1 \dots \textcircled{3} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{에서 } b^2 + d^2 = 1 \dots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④로 부터

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{는 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 또는 } \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \text{ 이다. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{이고 } \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 17/5 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

점 (3,2)가 옮겨지는 점은 (2,3) 또는 (6/5, 17/5)이다.

2. 먼저 각각의 $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ 를 나타내는 행렬을 구하자. 각 α 만큼 회전하는 회전변환을 g_α , x 축에 대한 대칭 변환을 h 라 하면 $h_\alpha = g_\alpha h g_\alpha^{-1} = g_\alpha h g_{-\alpha}$ 이므로, h_α 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \text{ 이고, 같은 방법으로 } h_\beta \text{와 } h_\gamma \text{를 나타내는 행렬은}$$

$$\text{각각 } \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \text{가 된다.}$$

$$\text{합성변환 } h_\alpha \circ h_\beta \text{를 나타내는 행렬은 } \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \text{이 되고,}$$

따라서 $h_\alpha \circ h_\beta$ 는 각 $2(\alpha-\beta)$ 만큼 회전하는 회전변환이다.

$$h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma \text{를 나타내는 행렬은 } \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ \sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta+\gamma) & \sin 2(\alpha-\beta+\gamma) \\ \sin 2(\alpha-\beta+\gamma) & -\cos 2(\alpha-\beta+\gamma) \end{pmatrix}$$

이므로 $h_\alpha \circ h_\beta \circ h_\gamma$ 는 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\alpha-\beta+\gamma)$ 인 직선에 대한 대칭변환이다.

3. $a_n - a_{n+1} + a_{n+2} = 1$ 이므로 문제 2에 의해 임의의 자연수 n 에 대해 $f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$ 는 원점을 지나고

$$\text{기울기가 } \tan\left(\frac{a_n\pi}{12} - \frac{a_{n+1}\pi}{12} + \frac{a_{n+2}\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} \text{인 직선에 대한 대칭변환이다. 이를 } f \text{라 하자.}$$

즉, 임의의 자연수 n 에 대해 $f = f_n \circ f_{n+1} \circ f_{n+2}$ 이다.

2014 = 3×671 + 1 이고 $f \circ f$ 는 항등변환이므로

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{2014} = f_1 \circ (f_2 \circ f_3 \circ f_4) \circ (f_5 \circ f_6 \circ f_7) \circ \dots \circ (f_{2012} \circ f_{2013} \circ f_{2014}) = f_1 \circ \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{671\text{개}} = f_1 \circ f$$

이다. f_1 은 원점을 지나고 기울기가 $\tan\frac{5\pi}{12}$ 인 직선에 대한 대칭변환이므로, 문제 2에 의해 $f_1 \circ f$ 는

$$\text{각 } 2\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\pi}{3} \text{만큼 회전하는 회전변환이다.}$$

$$1. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 6xh - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 6x = f'(0) + 6x$$

따라서 $f(x) = 3x^2 + f'(0)x + C$ 이다. (여기서 C 는 적분상수이다)

- $f(0) = 0 = C$ 이다.
- $f(1) = 1 = 3 + f'(0)$ 이므로 $f'(0) = -2$ 이다.

그러므로 $f(x) = 3x^2 - 2x$ 이다.

2. 중간값의 정리에 의해 $f(x) = \frac{1}{2}$ 인 x_0 가 0과 1사이에 존재한다.

구간 $[0, x_0]$ 와 $[x_0, 1]$ 에 대하여 평균값의 정리를 적용하면,

$$f'(c_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0} \text{ 와 } f'(c_2) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1 - f(x_0)}{1 - x_0} \text{ 인 } 0 < c_1 < x_0 \text{ 과 } x_0 < c_2 < 1 \text{ 가 존재한다.}$$

$$\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2 \Leftrightarrow \frac{x_0}{f(x_0)} + \frac{1 - x_0}{1 - f(x_0)} = 2$$

$$\Leftrightarrow x_0(1 - f(x_0)) + (1 - x_0)f(x_0) = 2f(x_0)(1 - f(x_0))$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2f(x_0))(x_0 - f(x_0)) = 0$$

그런데, $f(x_0) = \frac{1}{2}$ 이므로, $1 - 2f(x_0) = 0$ 이다. 따라서 $(1 - 2f(x_0))(x_0 - f(x_0)) = 0$ 이 성립한다.

그러므로 $\frac{1}{f'(c_1)} + \frac{1}{f'(c_2)} = 2$ 이다.

3. $n = 1$ 인 경우는 구간 $[0, 1]$ 에서 평균값 정리를 적용하면, $f'(c_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$ 인 c_1 이 0과 1사이에

존재한다. $n = 2$ 인 경우는 (2)에서 이미 증명하였는데, 증명의 아이디어는 다음과 같다.

- ① 구간 $[0, 1]$ 의 함수 f 에 대한 치역 $f([0, 1])$ 에 포함되는 구간 $[0, 1]$ 을 2등분하여 중간값의 정리를 적용.
- ② 중간값의 정리의 적용을 통해 구한 값 $x_0 \in (0, 1)$ 에 의해 결정된 두 구간 $[0, x_0]$ 과 $[x_0, 1]$ 에 대해 평균값의 정리를 적용.

$n \geq 3$ 인 경우에도 위의 아이디어를 적용한다. 우선 치역 $f([0, 1])$ 에 포함되는 구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하여 얻은

값은 $\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ 이다. k 는 $1 \leq k \leq n-1$ 인 자연수라고 할 때, 중간값의 정리에 의해 $f(x) = \frac{k}{n}$ 를

만족시키는 x 가 0과 1사이에 적어도 하나 존재한다. 그런 x 중에서 제일 작은 수를 a_k 라고 하자. 그러면,

$f(a_k) = \frac{k}{n}$ ($1 \leq k \leq n-1$)이고, 중간값의 정리에 의해 $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < 1$ 을 만족함을 알 수 있다.

$a_0 = 0, a_n = 1$ 이라 하고, 구간 $[a_{k-1}, a_k]$ 에서 평균값의 정리를 적용하면 $f'(c_k) = \frac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}}$ 을 만족시키는

c_k 가 a_{k-1} 과 a_k 사이에 적어도 하나 존재한다. 그런데, $f'(c_k) = \frac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} = \frac{\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}}{a_k - a_{k-1}} = \frac{1}{n(a_k - a_{k-1})}$ 이

므로, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{f'(c_k)} = \sum_{k=1}^n n(a_k - a_{k-1}) = n(a_n - a_0) = n$ 이다.