한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시

자 연 계 (1)

논 술 예 시 답 안

1번

1. $A_n = \pi\int_0^{2^n a_n}(2^n a_n - y)dy = \pi(2^n a_n y - \frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{2^n a_n} = \frac{\pi}{2}4^n a_n^2$이다.

$A_n = 2\pi$이므로 $a_n = \frac{2}{2^n}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$

2. $B_n = \int_0^1 (1 - \frac{1}{2^n b_n} ln(x+1))dx = x - \frac{1}{2^n b_n}((x+1)\ln(x+1) - (x+1))\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2^n b_n}(2\ln 2 - 1)$이다.

$B_n = 2\pi$이므로 $b_n = \frac{2\ln 2 - 1}{2^n(1-2\pi)}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{2\ln 2 - 1}{1-2\pi} = \frac{1-2\ln 2}{2\pi - 1} = -\frac{2\ln 2 - 1}{2\pi - 1}$

3. $C_n = \pi\int_0^1 c_n^2 4^{-nx}dx = \frac{\pi c_n^2}{\ln 4^{-n}}4^{-nx}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\ln 2}(1 - \frac{1}{4^n})\frac{c_n^2}{n}$이다.

$C_n = 2\pi$이므로 $c_n = \sqrt{4\ln 2 \cdot n} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}}$이고 $\frac{c_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{4\ln 2} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}}$이다.

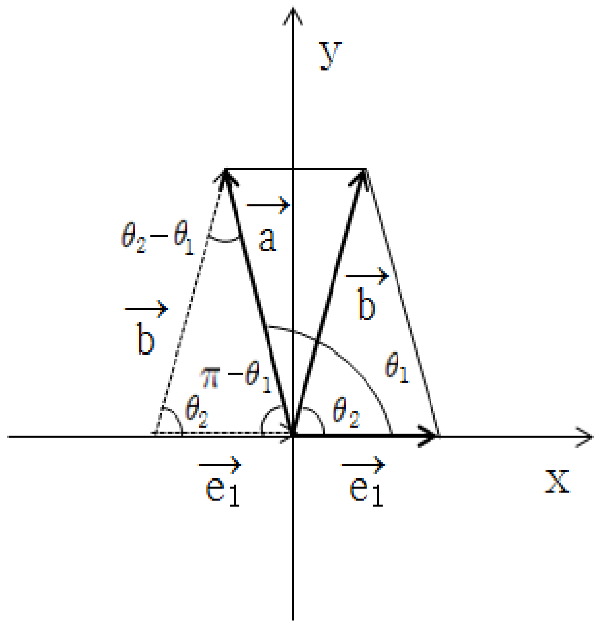
따라서 $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{4\ln 2 \cdot n} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}} = \infty$이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{4\ln 2} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{4^n - 1}} = \sqrt{4\ln 2} = 2\sqrt{\ln 2} \neq 0$이다.

“무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 수렴하면, $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$이다”는 사실에 의하여

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$와 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}}$는 모두 발산한다.

한양대학교 2015학년도 신입학전형 수시		
자 연 계 (1)	논 술 예 시 답 안	2번



1. 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각은 $\theta=\theta_1-\theta_2$이다. 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e_1}$이 만드는 삼각형에서 코사인 제2법칙에 의하여

$$|\vec{e_1}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

이므로, $1=2+1-2\vec{a}\cdot\vec{b}$이다.

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ 이다.

2. 삼각형의 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sin\theta_2}{|\vec{a}|}=\dfrac{\sin(\pi-\theta_1)}{|\vec{b}|}=\dfrac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{1}$이 성립한다.

따라서 $|\vec{a}|=\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}$이다.

벡터 벡터 $\vec{a}$가 x축 아래에 놓여있는 경우를 고려하면,

벡터 $\vec{a}$의 x성분은 $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\cos\theta_1$이고, 벡터 $\vec{a}$의 y성분은 $\pm\dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1-\theta_2)}\sin\theta_1$이다.

3. $f(\theta)=\sin\theta, (0<\theta<\pi)$일 때, $f''(\theta)<0$이다. 따라서 구간 $[0,\pi]$에서 함수 $f(\theta)$는 위로 볼록인 함수이다. 그러므로,

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\theta_1)+\sin\theta_2+\sin(\theta_1-\theta_2) &\le 2\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\sin(\theta_1-\theta_2)\\ &=3\left[\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin(\theta_1-\theta_2)\right]\\ &\le 3\sin\left(\frac{2}{3}\frac{\pi-\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{1}{3}(\theta_1-\theta_2)\right)\\ &=3\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$