논술고사 출제 의도 및 답안 (자연계열 I)

문제 1

[문제 1] 닫힌 구간 $[0,\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{x}\sin x$가 있다. $f(x)$가 $x=\theta$에서 최댓값 M을 가질 때 다음 물음에 답하시오. [35점]

(1) θ와 M의 값을 구하시오.

(2) $n \ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)=Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)$$

(3) $n \ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$M^{n}e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^{n}\frac{1}{n}\pi<\int_{0}^{\pi}\{f(x)\}^{n}dx<M^{n}\pi$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_{0}^{\pi}\{f(x)\}^{n}dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$임을 보이시오. (단, n은 4 이상의 자연수이고, $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$이다.)

문제 1 – 출제 의도

학생들이 미분과 적분을 이용하여 함수의 기본성질로부터 내재적 특징을 논리적이고 종합적으로 유도할 수 있는지를 측정하고자 한다. 이를 위해 닫힌 구간에서 지수함수와 삼각함수의 곱으로 주어진 함수에 대하여 함수의 최댓값을 미분과 정적분을 적용하여 유도할 수 있는지를 알아보고자 한다.

문제 1 – 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	21, 123, 151-154, 209, 219
	고등학교 미적분 II	우정호 외	동아출판	2014	46, 98, 110

문제 1 – 채점 기준

문항	채점기준	배점
1-(1)	θ와 M의 값을 구하시오.	10
	$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$	2
	$x=\frac{3}{4}\pi$에서만 $f'(x)=0$	1
	$x<\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 증가	2
	$x>\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 감소	2
	$\theta=\frac{3}{4}\pi$	1
	최댓값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$	2
1-(2)	$n\ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오. $f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)=Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)$	5
	$f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{n}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{n}\pi\right\}$	3
	$e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{n}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{n}\pi\right\}=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\}$	2
1-(3)	$n\ge 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오. $M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi<\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n dx<M^n\pi$	10
	부등식의 오른쪽 부분: $x\in[0,\pi]$에서 $0\le f(x)\le M$이므로 $0\le\{f(x)\}^n\le M^n$이 성립	2

문항	채점기준	배점
	$\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n \, dx < \int_0^{\pi} M^n \, dx = M^n \pi$	2
	부등식의 왼쪽 부분: $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi\right]$에서 $M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \le \{f(x)\}^n$	2
	$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n dx$	2
	$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n dx \le \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{n}\pi} \{f(x)\}^n \, dx$	2
1-(3) 별해	함수 $y = (f(x))^n$에서 $y' = 0$인 $x = 0,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi$	2
	함수 $y = (f(x))^n$에서 $y' = 0$인 $x = \frac{3}{4}\pi$만 언급	1
	$y = (f(x))^n$이 구간 $[0, \frac{3}{4}\pi]$에서 증가	1
	$y = (f(x))^n$이 구간 $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$에서 감소	1
	또는 아래의 표를 만들고 증가, 감소 구간이 올바르면 $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline x & 0 & \text{...} & \frac{3}{4}\pi & \text{...} & \pi \\ \hline y' & 0 & + & 0 & - & 0 \\ \hline y & 0 & \nearrow \text{ 또는 증가} & M^n & \searrow \text{ 또는 감소} & 0 \\ \hline \end{array}$	2
	오른쪽 부등식: $\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n \, dx < \int_0^{\pi} M^n \, dx = M^n \pi$를 도형의 포함으로 설명	2
	왼쪽 부등식: $M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi} \{f(x)\}^n \, dx$를 도형의 포함으로 설명	2
1-(4)	$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$ 임을 보이시오. (단, n은 4 이상의 자연수이고, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$이다.)	10
	$Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}} < \left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} < M \cdot \pi^{\frac{1}{n}}$	2
	$\lim_{n\to\infty} Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi} \{f(x)\}^n \, dx\right)^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} M \cdot \pi^{\frac{1}{n}}$	3

문항	채점기준	배점
	$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\pi}{n}}=1$	1
	$\lim_{n\to\infty} \pi^{\frac{1}{n}}=1$	1
	$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)=\cos 0-\sin 0=1$	1
	$\lim_{n\to\infty} Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}=M$	1
	$\lim_{n\to\infty} M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}=M$	1

문제 1 – 예시 답안

1-(1) θ와 M의 값을 구하시오.

[풀이]

함수 $f(x)=e^x\sin x$를 미분하면 $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$이고, $x=\frac{3}{4}\pi$에서만 $f'(x)=0$이다. $x<\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 증가하고 $x>\frac{3}{4}\pi$에서 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 $f(x)$가 감소한다. 그러므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 최댓값 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=e^{\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$을 가진다. 따라서 $\theta=\frac{3}{4}\pi$이고 $M=e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

1-(2) $n\geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right)=Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)$$

[풀이]

지수함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 아래의 등식을 얻는다.

$$
\begin{aligned}
f\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right) &= e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\sin\left(\theta+\frac{1}{n}\pi\right) \\
&= e^{\theta+\frac{1}{n}\pi}\left\{\sin\theta\cos\frac{1}{n}\pi+\cos\theta\sin\frac{1}{n}\pi\right\} \\
&= e^{\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1}{n}\pi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{1}{n}\pi\right\} \\
&= e^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left\{\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right\} \\
&= M\cdot e^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)
\end{aligned}
$$

1-(3) $n \geq 4$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx < M^n\pi$$

[풀이]

오른쪽 부등식: $x\in[0,\pi]$에 대하여 $0\leq f(x)\leq M$이므로 $0\leq\{f(x)\}^n\leq M^n$이 성립하고 $f(x)$가 상수함수가 아니므로, 구간 $[0,\pi]$에서 적분하면

$$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx < \int_0^{\pi}M^n\,dx = M^n\pi$$

이다.

왼쪽 부등식: $n\geq 4$일 때, $\frac{3}{4}\pi<\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\leq\pi$이고 $f(x)$가 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\pi\right]$에서 감소하므로 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$에 속한 x에 대하여

$$f(\pi)\leq f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\leq f(x)$$

이다. 따라서

$$0\leq Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\leq f(x)$$

가 성립한다. 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi,\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$에서

$$\left\{Me^{\frac{1}{n}\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n = M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n \leq \{f(x)\}^n$$

이므로 위의 부등식을 적분하면

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi}M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n dx \leq \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi}\{f(x)\}^n\,dx$$

가 성립한다. 그리고 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$가 $[0,\pi]$의 부분집합이고 $f(x)\geq 0$이므로

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi}\{f(x)\}^n\,dx < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx$$

가 성립한다. 위의 두 부등식으로부터

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx$$

를 얻는다. 그러므로 $n\geq 4$에 대하여

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi < \int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx < M^n\pi$$

가 성립한다.

[별해]

$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n = \left\{f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n$ 이다.

$n\geq 4$에 대하여 $y=(f(x))^n$의 도함수는

$$\begin{aligned} y' &= n(f(x))^{n-1}\cdot f'(x) = n\cdot e^{nx}\sin^n x + n\cdot e^{nx}\sin^{(n-1)}x\cos x \\ &= n\cdot e^{nx}\sin^{(n-1)}x(\sin x+\cos x) \end{aligned}$$

이고, $y'=0$이면 $x=0,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi$이다.

$0\leq x\leq\pi$에서 $y=(f(x))^n$의 증가, 감소를 알아보기 위해 y'의 부호를 표로 만들면

x	0	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
y'	0	+	0	-	0
y	0	↗ 또는 증가	M^n	↘ 또는 감소	0

이므로 $y=(f(x))^n$는 구간 $[0,\ \pi]$에서 $x=\frac{3}{4}\pi$일 때 최댓값 M^n을 가진다.

오른쪽 부등식: 구간 $[0,\ \pi]$에서 $y=(f(x))^n$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분은 밑변이 $[0,\ \pi]$이고 높이가 M^n인 직사각형에 포함되므로

$$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx < \int_0^{\pi}M^n\,dx = M^n\pi$$

가 성립한다.

왼쪽 부등식: $M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi$는 밑변이 구간 $\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right]$이고 높이가 $M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n = \left\{f\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{n}\pi\right)\right\}^n$인 직사각형의 넓이이다. 이 직사각형은 함수

$y=(f(x))^n$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분에 포함되어 있으므로

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi<\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx$$

가 성립한다.

1-(4) $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}=M$ 임을 보이시오. (단, n은 4 이상의 자연수이고, $\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ 이다.)

[풀이]

문항 1-(3)의 부등식

$$M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi<\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx<M^n\pi$$

에 $\sqrt[n]{}$ 을 적용하면

$$\left(M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}<(M^n\pi)^{\frac{1}{n}}=M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이다. 위 부등식의 왼쪽 부분을 정리하면

$$\left(M^n e^{\pi}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)^n\frac{1}{n}\pi\right)^{\frac{1}{n}}=Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}$$

이므로, 위의 부등식을 다시 쓰면

$$Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}<\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}<M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이고, 극한값의 대소관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\le\lim_{n\to\infty}M\cdot\pi^{\frac{1}{n}}$$

이 된다.

여기에서 π와 e는 상수이므로

$$\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\pi}{n}}=1\text{과 }\lim_{n\to\infty}\pi^{\frac{1}{n}}=1$$

을 얻고, 또한

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right)=\cos0-\sin0=1$$

이며, 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} Me^{\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{1}{n}\pi - \sin\frac{1}{n}\pi\right)\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\pi^{\frac{1}{n}} = M$$

이고

$$\lim_{n\to\infty} M \cdot \pi^{\frac{1}{n}} = M$$

이다. 따라서 위의 부등식은

$$M \le \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \le M$$

이다. 그러므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi}\{f(x)\}^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$이다.

문제 2

[문제 2] 정의역과 공역이 실수 전체의 집합이며 일대일대응인 함수 $f(x)$가 모든 실수 a, b에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$f(a+f(b))=f(a)+b$$

다음 물음에 답하시오. [35점]

(1) $f(0)$의 값을 구하고, 모든 실수 b에 대하여 $f(f(b))=b$임을 보이시오.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

문제 2 - 출제 의도

함수에 대한 기초적인 이해를 바탕으로 함수의 주어진 성질로부터 다른 성질들을 추론하고 이 성질들을 활용하여 함수의 연속성과 미분가능성을 확인하고 미분계수를 계산하며 도함수의 부정적분을 통하여 함수를 찾는 문제이다. 함수, 합성함수, 함숫값들 사이의 관계, 일대일대응, 연속성, 미분가능성, 미분계수, 도함수, 부정적분 등의 개념들을 정확하고 종합적으로 활용하여 논리적으로 해답을 얻어낼 수 있는 능력을 평가하고자 하였다.

문제 2 – 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 II	이준열 외	천재교육	2014	12-16, 34-39, 68-75
	고등학교 수학 II	김창동 외	교학사	2014	13-16, 37-45, 67-76
	고등학교 미적분 I	정상권 외	금성출판사	2014	52-70, 92-103, 156-161
	고등학교 미적분 I	우정호 외	동아출판	2014	60-74, 82-87, 108-124, 178-184

문제 2 - 채점 기준

문항	채점기준	배점
2-(1)	$f(0)$의 값을 구하고, 모든 실수 b에 대하여 $f(f(b))=b$임을 보이시오.	10
	$f(0)=0$임을 논리적으로 보임.	5
	모든 실수 b에 대하여 $f(f(b))=b$임을 논리적으로 보임.	5
2-(2)	함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.	12
	임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$를 보이면 된다는 사실을 명시하거나, 극한 $\lim_{h\to 0} f(a+h)$를 고려함.	3
	$f(x)$의 $x=0$에서의 연속성으로부터 $\lim_{h\to 0} f(h)=0$ 또는 $\lim_{h\to 0} f(h)=f(0)$을 얻어냄.	3
	임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$임을 논리적으로 보여서 f의 연속성을 보임.	6
2-(3)	함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.	13
	$f(x)$가 임의의 실수 $x=a$에서 미분가능함을 보이기 위하여 극한 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 를 고려함.	3
	$f(x)$의 $x=0$에서의 미분가능성으로부터 극한 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ 또는 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ 이 존재한다는 것을 보임.	2
	$f(x)$가 모든 실수에서 미분가능함을 논리적으로 보임.	5
	미분계수를 잘 계산하여 도함수가 $f'(x)=k$ 또는 $f'(x)=f'(0)$인 상수함수임을 보임.	1
	답이 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$ 밖에 없음을 논리적으로 보임.	2

문제 2 – 예시 답안

2-(1) $f(0)$의 값을 구하고, 모든 실수 b에 대하여 $f(f(b))=b$임을 보이시오.

[풀이]

등식 $f(a+f(b))=f(a)+b$에 $a=0$을 대입하면 모든 실수 b에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(f(b))=f(0)+b$$

이 등식에 $b=0$을 대입하면 $f(f(0))=f(0)$을 얻는다. f가 일대일대응이므로 만약 $f(0)\neq 0$이라면 $f(f(0))\neq f(0)$이 되어 모순이다. 따라서 $f(0)=0$이다.

이제 $f(0)=0$이므로 모든 실수 b에 대하여 등식

$$f(f(b))=f(0)+b=b$$

가 성립함을 알 수 있다.

2-(2) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속일 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 보이시오.

[풀이]

임의의 실수 a에 대하여 등식

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

가 성립하면 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

임의의 실수 c, d에 대하여, f가 일대일대응이므로 $d=f(b)$인 실수 b가 있고, 주어진 등식으로부터

$$f(c+d)=f(c+f(b))=f(c)+b$$

임을 알 수 있다. 그런데 $d=f(b)$이므로 문항 (1)에 의하여 $f(d)=f(f(b))=b$이다. 따라서

$$f(c+d)=f(c)+f(d)$$

이고 이 등식은 모든 실수 c, d에 대하여 성립한다.

위에서 얻은 등식을 활용하면, 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0}\{f(a)+f(h)\}=f(a)+\lim_{h\to 0} f(h)$$

이다. $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{h\to 0} f(h)=f(0)=0$이다. 따라서

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$가 임의의 실수 $x=a$에서 연속이다.

2-(3) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 때, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 ㄱㄱz미분가능함을 보이고, 함수 $f(x)$를 모두 구하시오.

[풀이]
임의의 실수 a에 대하여 극한

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

문항 (2)의 풀이에서 $f(a+h)=f(a)+f(h)$와 $f(0)=0$을 활용하면, $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f'(0)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)=f'(0)$이다.
$f'(0)$을 k라고 두고 도함수 $f'(x)=k$를 적분하면 $f(0)=0$이므로

$$f(x)=kx$$

이다. 이 식을 등식 $f(a+f(b))=f(a)+b$에 대입하면

$$ka+k^2b=ka+b$$

이므로 $k^2=1$이다. 즉 $k=1$ 또는 $k=-1$.
따라서 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$이다.

문제 3

[문제 3] 좌표평면에서 두 집합 $A=\{(-3,t)\mid -3\le t\le 3\}$과 $B=\{(3\cos\theta+6,3\sin\theta)\mid 0\le\theta<2\pi\}$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 좌표평면 위의 한 점 P(a,b)와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 1:2로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a,b에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오. (단, 점 P는 집합 B의 원소가 아니다.)

(2) 집합 A의 임의의 점 P와 점 C(6,0)에 대하여 선분 PC를 1:2로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.

(3) 집합 A의 임의의 점 P와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 1:2로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

문제 3 – 출제 의도

좌표평면의 두 집합에서 임의로 선택한 두 점에 대한 내분점이 나타내는 영역의 넓이를 구하는 문제이다. 이 과정에서 집합의 성질을 이해하고 삼각함수의 기본성질을 활용하여 원의 방정식을 유도하는 수리적 능력, 원의 성질과 내분점의 성질을 활용하여 영역을 구하는 수학적 개념의 종합적 활용 능력, 이 영역의 넓이를 효율적으로 기획하여 계산하는 능력을 활용하여 문제를 해결한다.

문제 3 - 출제근거

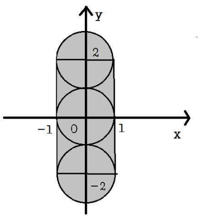
가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행연도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학 I	이준열 외	천재교육	2014	136-147, 168-184, 196-203, 212-217
	고등학교 수학 II	류희찬 외	천재교과서	2014	14-16
	고등학교 미적분 II	김원경 외	비상교육	2014	51-56

문제 3 - 채점 기준

문항	채점기준	배점
3-(1)	좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,b)$와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a, b에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오. (단, 점 P는 집합 B의 원소가 아니다.)	10
	선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점 $(x,y)=\left(\dfrac{2a+(3\cos\theta+6)}{3}, \dfrac{2b+3\sin\theta}{3}\right)$	4
	$\left(x-\dfrac{2a+6}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2b}{3}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 식을 구함	4
	중심이 $\left(\dfrac{2a}{3}+2, \dfrac{2b}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원	2
3-(2)	집합 A의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{C}(6,0)$에 대하여 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.	5
	선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 구하면 $\left(0, \dfrac{2t}{3}\right)$	3
	집합은 $\left\{\left(0, \dfrac{2}{3}t\right) \mid -3 \le t \le 3\right\}$	2
3-(3)	집합 A의 임의의 점 P와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.	15
	집합 A의 한 점 $(-3,t)$를 정하고 집합 B의 임의의 점과 이루는 선분을 $1:2$로 내분하는 점으로 구성된 집합을 S라 하면 집합 S는 문항 (1)에 따라 중심이 $\left(0, \dfrac{2}{3}t\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 t에 의해 모은 영역	4
	집합 S의 영역 	6
	집합 S가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1인 반원 2개와 변의 길이가 $4, 2$인 직사각형으로 나누어지므로 집합 S가 나타내는 영역의 넓이는 $1^2\pi+4\cdot 2=\pi+8$	5

문제 3 – 예시 답안

3-(1) 좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,b)$와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합이 원을 나타냄을 보이고, 이 원의 중심을 a, b에 대한 식으로 나타내고 반지름의 길이를 구하시오.(단, 점 P는 집합 B의 원소가 아니다.)

[풀이]

좌표평면의 한 점 $\mathrm{P}(a,b)$와 집합 B의 임의의 한 점 $\mathrm{Q}(3\cos\theta+6, 3\sin\theta)$를 이은 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점 (x,y)를 구하면

$$(x,y)=\left(\frac{2a+(3\cos\theta+6)}{3},\frac{2b+3\sin\theta}{3}\right)$$

이다. 삼각함수에 대한 식으로 쓰면

$$(\cos\theta,\sin\theta)=\left(x-\frac{2a+6}{3},y-\frac{2b}{3}\right)$$

이고

$$\left(x-\frac{2a+6}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2b}{3}\right)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

이므로 중심이 $\left(\frac{2a}{3}+2,\frac{2b}{3}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 나타낸다.

3-(2) 집합 A의 임의의 점 P와 점 $\mathrm{C}(6,0)$에 대하여 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 원소로 하는 집합을 구하시오.

[풀이]

점 $\mathrm{P}(-3,t)$와 점 $\mathrm{C}(6,0)$을 이은 선분 PC를 $1:2$로 내분하는 점을 구하면

$$\left(\frac{2\cdot(-3)+1\cdot 6}{3},\frac{2\cdot t+1\cdot 0}{3}\right)=\left(0,\frac{2t}{3}\right)$$

이다. 따라서 구하는 집합은

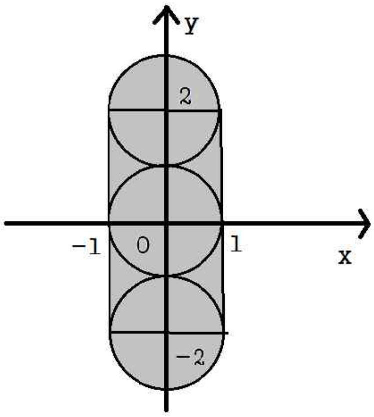
$$\left\{\left(0,\frac{2}{3}t\right)\middle|-3\le t\le 3\right\}$$

이다.

3-(3) 집합 A의 임의의 점 P와 집합 B의 임의의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점이 나타내는 영역의 넓이를 구하시오.

[풀이]

집합 A의 한 점 $(-3,t)$를 정하고 집합 B의 임의의 점과 이루는 선분을 $1:2$로 내분하는 점으로 구성된 집합을 S라 하면 집합 S는 문항 (1)에 따라 중심이 $\left(0,\frac{2}{3}t\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 t에 의해 모은 영역으로 나타난다. 범위 $-3 \le t \le 3$에서 중심이 $\left(0,\frac{2}{3}t\right)$인 원을 살펴보면 집합 S의 영역은 아래와 같이 나타난다.



집합 S가 나타내는 영역은 반지름의 길이가 1인 반원 2개와 변의 길이가 $4,2$인 직사각형으로 나누어지므로 집합 S가 나타내는 영역의 넓이는 $1^2\pi+4 \cdot 2=\pi+8$이다.