

4. 자연 II

[문제1] 자연수 m 을 2018 이하의 짝수 중에서 선택하고, 자연수 n 은 2018 이하의 3의 배수 중에서 선택할 때, 각 m, n 에 대하여 삼차함수가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = 2x^3 - 3(m+n)x^2 + 6(m^2 + n^2 - mn)x + 1$$

이때, $f'(x) = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오. [20점]

■ 출제의도

고등학생이 기본적으로 알고 있어야 하는 수학의 기본 교과내용들을 점검하고, 그 내용들을 조합하여 문제를 해결하는 창의력을 테스트한다. 다항함수의 미분, 이차방정식의 판별식을 통해 주어진 두 자연수가 같음을 확인하고, 2와 3의 공배수는 6의 배수임을 착안해 문제를 해결한다.

■ 모범답안

이차방정식 $f'(x) = 6(x^2 - (m+n)x + m^2 + n^2 - mn) = 0$ 이 근을 갖도록 판별식을 적용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 0 \leq D &= (m+n)^2 - 4(m^2 + n^2 - mn) \\ &= -3m^2 - 3n^2 + 6mn \\ &= -3(m-n)^2 \end{aligned}$$

따라서, $m = n$ 일 때, 해가 존재한다. $m = n$ 일 때 m 과 n 은 6의 배수이므로, 답은 $\left\lfloor \frac{2018}{6} \right\rfloor = 336$ 이다.

[문제2] 임의의 양의 실수 x 에 대하여 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 정적분의 정의에 의해 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x}$$

(2) 문제 (1)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(3) 문제 (2)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$$

(4) 문제 (2)와 문제 (3)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

(5) 문제 (4)의 부등식을 이용하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 임을 보이시오.

■ 출제의도

함수와 역함수 사이의 관계와 함수의 극한값이 가지는 기본적인 성질을 이해하고 있는지를 측정하고자 하는 문제이다. 이를 위하여 정적분의 정의를 이용하여 자연로그에 대한 부등식을 유도하고, 여기에서 자연상수 e 에 의해 정의되는 지수함수를 적용시켜 새로운 부등식을 만든 다음, 이로부터 교과서에 정의로 주어진 자연상수 e 를 실제로 얻어낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

■ 모범답안

(1) x 가 양의 실수이므로 구간 $[x, x+1]$ 에서 함수 $y = \frac{1}{t}$ 는 단조감소함수이므로 최대값은 $\frac{1}{x}$ 이고 최소값은 $\frac{1}{x+1}$ 이다. 따라서 정적분의 정의에 의해 위의 부등식이 성립한다.

(2) 정적분을 계산하면 $\int_x^{x+1} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^{x+1} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

(3) 문제 (2)의 부등식 $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ 의 각 항에 x 를 곱하면 x 가 양수이므로

$$\frac{x}{x+1} < x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 1$$

을 얻고, 이 부등식에 지수 함수 e^t 를 취하면 $y = e^t$ 는 증가함수이므로

$$e^{\frac{x}{x+1}} < e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} < e$$

이 성립한다. 그리고 지수 함수와 로그 함수는 서로 역함수이기 때문에 $e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 이므로 주어진 부등식이 참임을 알 수 있다.

(4) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e$ 는 이미 주어졌으므로 $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 임의의 양수 x 에 대하여 참임을 보이면 된다.

먼저 문제 (3)의 왼쪽 부등식에 $e^{\frac{1}{x+1}}$ 을 곱하면 $e^{\frac{1}{x+1}} e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}$ 이 되고 지수법칙에 의

해 $e^{\frac{x}{x+1}} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}} = e^{\frac{x+1}{x+1}} = e^1 = e$ 가 되어 $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}$ 을 얻는다. 그리고 문제 (2)의 왼쪽

부등식에 지수함수를 취하면 $e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 이 성립한다. 그러므로

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립하여 임의의 양수 x 에 대하여 $e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이

참이다. 따라서 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 성립한다.

(5) (4)의 부등식에 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ 를 취하면 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e = e \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 이 되고,

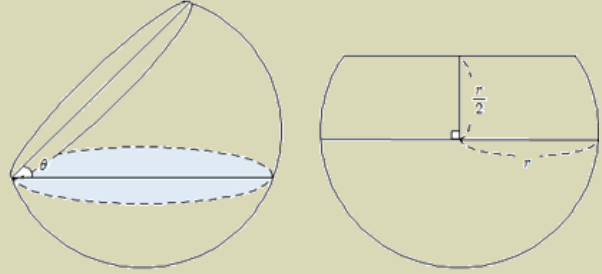
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq e \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 이 성립한다. 따라서 함수의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 이 참이다.

[문제3] 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 구에서 윗부분이 $\frac{r}{2}$ 인 위치가 잘린 모양의 그릇에 물이 가득 담겨 있다. 아래 왼쪽 그림과 같이 그릇을 θ 의 각도로 기울였을 때, 그릇에 남아 있는 물의 부피를 $V(\theta)$ 라고 하자. 다음 물음에 답하시오. [40점]

- (1) 그릇에 남아 있는 물의 부피 $V(\theta)$ 를 r 과 θ 의 식으로 나타내시오.
 (2) 그릇에서 쏟아진 물의 부피 $W(\theta)$ 의 변화율 $\frac{dW}{d\theta}$ 가 최대가 되는 θ 를 구하고, 이때까지 쏟아진 물의 부피를 구하시오.



■ 출제의도

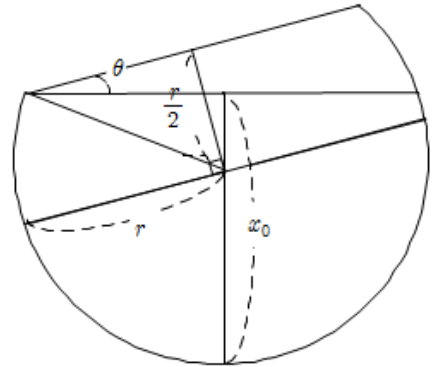
정적분의 활용으로 입체도형의 부피를 구하는 방법을 알고 있는 지를 측정하고자 하는 문제이다. 특히 구의 일부분에 해당하는 입체도형의 부피를 계산하고, 미분법을 활용하여 부피의 변화율을 계산할 수 있는지 묻고자 하였다.

■ 모범답안

(1) (i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 인 경우, 그릇에 담긴 물의 깊이는

$x_0 = r + r \sin \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{6} - \theta$ 가 된다. 이 때, 그릇에 담긴 물의 부피 $V(\theta)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \int_{-r \sin \tilde{\theta}}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\ &= \pi(r^2(r + r \sin \tilde{\theta}) - \frac{1}{3}(r^3 - (-r \sin \tilde{\theta})^3)) \\ &= \frac{\pi}{3} r^3 (3(1 + \sin \tilde{\theta}) - (1 + \sin^3 \tilde{\theta})) \\ &= \frac{\pi}{3} r^3 (2 + 3 \sin \tilde{\theta} - \sin^3 \tilde{\theta}) \\ &= \frac{\pi}{3} r^3 \left(2 + 3 \sin \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) - \sin^3 \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \right) \end{aligned}$$



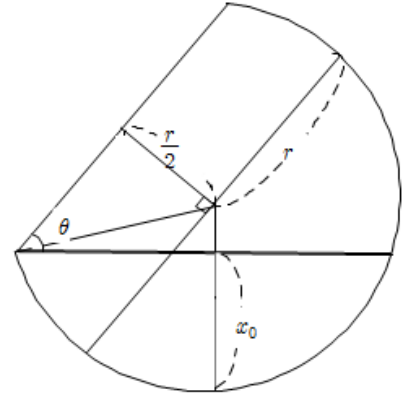
(ii) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ 인 경우, 그릇에 담긴 물의 깊이는 $x_0 = r - r \sin \tilde{\theta}$, $\tilde{\theta} = \theta - \frac{\pi}{6}$ 가 된다. 이 때, 그릇에 담긴 물의 부피 $V(\theta)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \int_{r \sin \tilde{\theta}}^r \pi(r^2 - x^2) dx \\ &= \pi(r^2(r - r \sin \tilde{\theta}) - \frac{1}{3}(r^3 - r^3 \sin^3 \tilde{\theta})) \\ &= \frac{\pi}{3} r^3 (3(1 - \sin \tilde{\theta}) - (1 - \sin^3 \tilde{\theta})) \\ &= \frac{\pi}{3} r^3 (2 - 3 \sin \tilde{\theta} + \sin^3 \tilde{\theta}) \\ &= \frac{\pi}{3} r^3 \left(2 - 3 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \sin^3 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) \end{aligned}$$

따라서 그릇에 담긴 물의 부피

$$V(\theta) = \frac{\pi}{3} r^3 \left(2 - 3 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \sin^3 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right), 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

가 된다.



(2) 그릇의 기울어진 각도가 θ 일 때, 그릇에서 쏟아진 물의 양 $W(\theta) = \frac{9\pi}{8} r^3 - V(\theta)$ 이 된다. 따라서

각도 θ 에 대한 쏟아진 물의 양의 변화율은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} W(\theta) &= -\frac{d}{d\theta} \frac{\pi}{3} r^3 \left(2 - 3 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \sin^3 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= -\pi r^3 \left(-\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= \pi r^3 \cos^3 \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

이고 $0 \leq \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ 이므로, 이 구간에서 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때, $\frac{d}{d\theta} W(\theta) = \pi r^3$ 으로 최대이다.

한편, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때까지 쏟아진 물의 부피는

$$W\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9\pi}{8} r^3 - V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9\pi}{8} r^3 - \frac{2\pi}{3} r^3 = \frac{11\pi}{24} r^3 \text{ 이다.}$$