3. 자연 I

[문제1] 자연수 m을 2018 이하의 짝수 중에서 선택하고, 자연수 n은 2018 이하의 3의 배수 중에서 선택할 때, 각 m, n에 대하여 삼차함수가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = 2x^3 - 3(m+n)x^2 + 6(m^2+n^2-mn)x + 1$$

이때, $f'(x) = 0$이 실근을 갖도록 하는 순서쌍 (m,n)의 개수를 구하시오. [20점]

■ 출제의도

고등학생이 기본적으로 알고 있어야 하는 수학의 기본 교과내용들을 점검하고, 그 내용들을 조합하여 문제를 해결하는 창의력을 테스트한다. 다항함수의 미분, 이차방정식의 판별식을 통해 주어진 두 자연수가 같음을 확인하고, 2와 3의 공배수는 6의 배수임을 착안해 문제를 해결한다.

■ 모범답안

이차방정식 $f'(x) = 6\left(x^2 - (m+n)x + m^2 + n^2 - mn\right) = 0$이 근을 갖도록 판별식을 적용하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} 0 \le D &= (m+n)^2 - 4(m^2+n^2-mn) \\ &= -3m^2 - 3n^2 + 6mn \\ &= -3(m-n)^2 \end{aligned}$$

따라서, $m = n$일 때, 해가 존재한다. $m = n$일 때 m과 n은 6의 배수이므로, 답은 $\left[\dfrac{2018}{6}\right] = 336$ 이다.

[문제2] 정적분의 정의에 의해 임의의 양의 실수 x에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{1}{x+1} < \int_{x}^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$$

다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 위의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(2) 문제 (1)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e$$

(3) 문제 (1)과 문제 (2)의 부등식을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

(4) 문제 (3)의 부등식을 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$임을 보이시오.

■ 출제의도

함수와 역함수 사이의 관계와 함수의 극한값이 가지는 기본적인 성질을 이해하고 있는 지를 측정하고자 하는 문제이다. 이를 위하여 정적분의 정의를 이용하여 자연로그에 대한 부등식을 유도하고, 여기에서 자연상수 e에 의해 정의되는 지수함수를 적용시켜 새로운 부등식을 만든 다음, 이로부터 교과서에 정의로 주어진 자연상수 e를 실제로 얻어낼 수 있는지를 평가하고자 한다.

■ 모범답안

(1) 정적분을 계산하면 $\int_{x}^{x+1}\frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{x}^{x+1} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

(2) (1)의 부등식 $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$의 각 항에 x를 곱하면 x가 양수이므로

$$\frac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < 1$$

을 얻고, 이 부등식에 지수 함수 e^{t}를 취하면 $y=e^{t}$는 증가함수이므로

$$e^{\frac{x}{x+1}} < e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} < e$$

이 성립한다. 그리고 지수 함수와 로그 함수는 서로 역함수이기 때문에 $e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$이므로 주어

진 부등식이 참임을 알 수 있다.

(3) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e$는 이미 주어졌으므로 $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 임의의 양수 x에 대하여 참임을 보이면 된다. 먼저 문제 (2)의 왼쪽 부등식에 $e^{\frac{1}{x+1}}$을 곱하면 $e^{\frac{x}{x+1}}e^{\frac{1}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}$이 되고 지수법칙에 의해 $e^{\frac{x}{x+1}}e^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{x+1}{x+1}} = e$가 되어 $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}$을 얻는다. 그리고 문제 (1)의 왼쪽 부등식에 지수함수를 취하면 $e^{\frac{1}{x+1}} < e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)$이 성립한다.

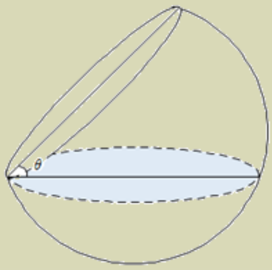
그러므로 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 성립하여 임의의 양수 x에 대하여 $e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 참이다. 따라서 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 성립한다.

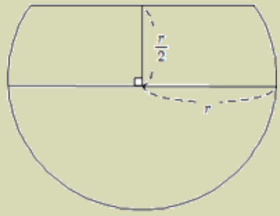
(4) 문제 (3)의 부등식에 극한 $\lim\limits_{x\to\infty}$를 취하면 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \lim\limits_{x\to\infty} e = e \le \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 되고, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e \le \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$이 성립한다. 따라서 함수의 극한의 대소관계에 의하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$이 참이다.

[문제3] 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구에서 윗부분이 $\frac{r}{2}$인 위치가 잘린 모양의 그릇에 물이 가득 담겨 있다. 아래 왼쪽 그림과 같이 그릇을 θ의 각도로 기울였을 때, 그릇에 남아 있는 물의 부피를 $V(\theta)$라고 하자. 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 그릇에 남아 있는 물의 부피 $V(\theta)$를 r과 θ의 식으로 나타내시오.

(2) 그릇에서 쏟아진 물의 부피 $W(\theta)$의 변화율 $\frac{dW}{d\theta}$가 최대가 되는 θ를 구하고, 이때까지 쏟아진 물의 부피를 구하시오.





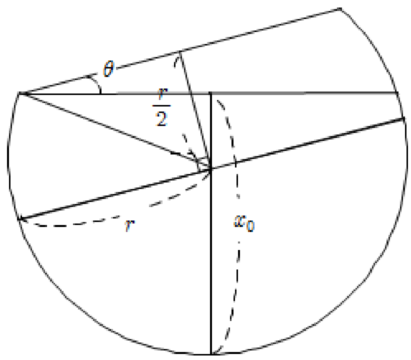
■ 출제의도

정적분의 활용으로 입체도형의 부피를 구하는 방법을 알고 있는 지를 측정하고자 하는 문제이다. 특히 구의 일부분에 해당하는 입체도형의 부피를 계산하고, 미분법을 활용하여 부피의 변화율을 계산할 수 있는지 묻고자 하였다.

■ 모범답안

(1) (i) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$인 경우, 그릇에 담긴 물의 깊이는

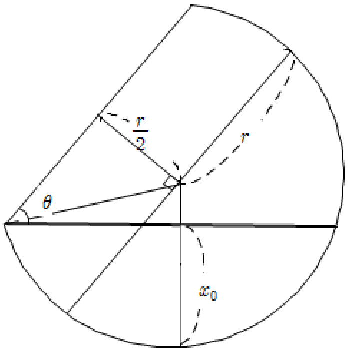
$x_0 = r + r\sin\tilde{\theta}$, $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{6} - \theta$가 된다. 이 때, 그릇에 담긴 물의 부피 $V(\theta)$는 다음과 같이 구할 수 있다.



$$
\begin{aligned}
V(\theta) &= \int_{-r\sin\tilde{\theta}}^{r} \pi\,(r^2 - x^2)\,dx \\
&= \pi\left(r^2(r + r\sin\tilde{\theta}) - \frac{1}{3}(r^3 - (-r\sin\tilde{\theta})^3)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3(3(1+\sin\tilde{\theta}) - (1+\sin^3\tilde{\theta})) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3(2 + 3\sin\tilde{\theta} - \sin^3\tilde{\theta}) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\left(2 + 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)\right)
\end{aligned}
$$

(ii) $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$인 경우, 그릇에 담긴 물의 깊이는 $x_0 = r - r\sin\tilde{\tilde{\theta}}$, $\tilde{\tilde{\theta}} = \theta - \frac{\pi}{6}$가 된다. 이 때, 그릇에 담긴 물의 부피 $V(\theta)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
V(\theta) &= \int_{r\sin\tilde{\tilde{\theta}}}^{r} \pi\,(r^2 - x^2)\,dx \\
&= \pi\left(r^2(r - r\sin\tilde{\tilde{\theta}}) - \frac{1}{3}(r^3 - r^3\sin^3\tilde{\tilde{\theta}})\right) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\left(3(1-\sin\tilde{\tilde{\theta}}) - (1-\sin^3\tilde{\tilde{\theta}})\right) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3(2 - 3\sin\tilde{\tilde{\theta}} + \sin^3\tilde{\tilde{\theta}}) \\
&= \frac{\pi}{3}r^3\left(2 - 3\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$



따라서 그릇에 담긴 물의 부피

$$V(\theta) = \frac{\pi}{3}r^3\left(2 - 3\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right),\ 0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$$

가 된다.

(2) 그릇의 기울어진 각도가 θ일 때, 그릇에서 쏟아진 물의 양 $W(\theta) = \frac{9\pi}{8}r^3 - V(\theta)$이 된다. 따라서 각도 θ에 대한 쏟아진 물의 양의 변화율은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}W(\theta) &= -\frac{d}{d\theta}\frac{\pi}{3}r^3\left(2 - 3\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= -\pi r^3\left(-\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \pi r^3\cos^3\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

이고 $0 \le \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \le 1$이므로, 이 구간에서 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때, $\frac{d}{d\theta}W(\theta) = \pi r^3$으로 최대이다.

한편, $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때까지 쏟아진 물의 부피는

$$W\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9\pi}{8}r^3 - V\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9\pi}{8}r^3 - \frac{2\pi}{3}r^3 = \frac{11\pi}{24}r^3$$이다.