

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[문제 1] 함수와 수열의 개념을 이해하고 수열의 합 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[문제 2] 함수의 극값을 판정할 수 있으며, 삼각함수의 그래프를 이해하고 있는지를 평가

[문제 3] 함수의 성질과 치환적분법을 사용하여 적분을 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

- 이준열 외 (2014), 수학 II, 66-85, 112-151쪽
- 신항균 외 (2014), 수학 II, 188-207쪽
- 황선욱 외 (2014), 미적분 II, 44-123쪽
- 우정호 외 (2014), 미적분 II, 148-217쪽

[문제 1 평가기준]

- 첫째항 $(g \circ f)(1) = 2$ 를 제시 : 5점
- 공차 2를 제시 : 5점
- $a = 9$ 를 제시 : 5점

[문제 2 평가기준]

- a 의 조건을 제시 : 6점
- $\alpha < \beta$ 임을 제시 : 7점
- $\sin\alpha, \sin\beta$ 값을 제시 : 7점

[문제 3 평가기준]

- 함수 $y = g(x)$ 를 제시 : 5점
- 치환을 사용하여 $aG(1) + \int_0^{G(1)} \sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx = \frac{3}{4} \int_0^{2/3} e^t dt$ 을 제시 : 10점
- 답 $\frac{3}{4}(e^{\frac{2}{3}} - 1)$ 을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[문제 1] 자연수 n 에 대하여

$$\begin{aligned} (g \circ f)(n+1) &= g(f(n)f(1)) \\ &= (g \circ f)(n) + (g \circ f)(1) \\ &= (g \circ f)(n) + 2 \end{aligned}$$

이므로 $\{(g \circ f)(n)\}$ 은 첫째항이 $(g \circ f)(1) = 2$ 이고 공차가 2인 등차수열이다. 따라서

$$1470 = \sum_{k=1}^{30} (g \circ f)(a+k) = \sum_{k=1}^{30} (2a+2k) = 60a + 2 \sum_{k=1}^{30} k = 60a + 930$$

이므로 $a = 9$ 이다. 답 : $a = 9$

[문제 2] 함수 f 의 도함수는

$$f'(x) = \frac{e^x(a + \sin x) - e^x \cos x}{(a + \sin x)^2} = \frac{e^x \{a - (\cos x - \sin x)\}}{(a + \sin x)^2} \dots\dots (*)$$

이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$a - (\cos x - \sin x) = 0 \dots\dots (**)$$

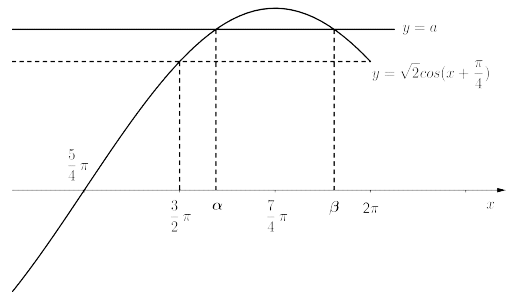
을 얻는다. 한편 $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 이고 (*)과 $a - (\cos x - \sin x)$ 의 부호는 같다. 따라서 제시문 (나)에 의하여

$$a - \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

의 부호를 조사하면 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 a 의 조건은 $1 < a < \sqrt{2}$

이고 α 와 β 의 관계는 $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \beta < 2\pi$

임을 알 수 있다(그림 참조).



한편 (**)식의 양변을 제곱하여 정리하면

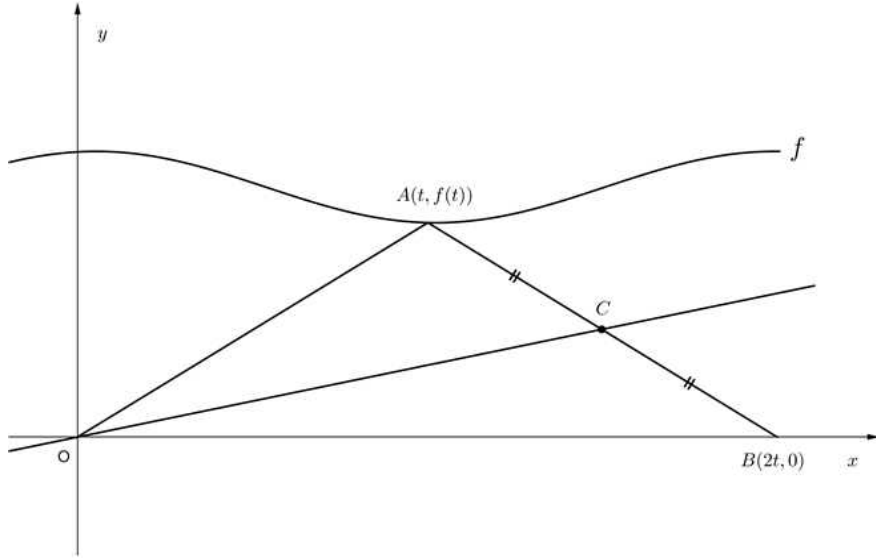
$$2\sin^2 x + 2a \sin x + (a^2 - 1) = 0$$

이므로 $\sin x = \frac{-a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}$ 이고, 구간 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ 에서 $\sin x$ 는 증가함수이므로

$$\sin \alpha = \frac{-a - \sqrt{2-a^2}}{2}, \quad \sin \beta = \frac{-a + \sqrt{2-a^2}}{2}$$

이어야 한다. 답 : $1 < a < \sqrt{2}, \sin \alpha = \frac{-a - \sqrt{2-a^2}}{2}, \sin \beta = \frac{-a + \sqrt{2-a^2}}{2}$

[문제 3] 원점 O 를 지나는 직선이 삼각형 OAB 의 넓이를 이등분하려면 이 직선은 선분 AB 의 중점을 지나야 한다.



따라서 C 는 선분 AB 의 중점이다. 점 C 의 좌표를 (x, y) 라 하면 $x = \frac{3t}{2}, y = \frac{f(t)}{2}$ 이므로

구하는 곡선의 방정식은 $y = \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}x\right)$ 이다, 따라서

$$g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}x\right)$$

이다. 이제, 문제에 주어진 적분을 구하기 위해서 $\frac{2}{3}G^{-1}(x) = t$ 라 치환하면

$$G'(x) = g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}x\right) \text{이므로 } x = G\left(\frac{3}{2}t\right) \text{ 이고 } dx = \frac{3}{2}G'\left(\frac{3}{2}t\right)dt = \frac{3}{4}f(t) dt$$

이다. 따라서

$$\int_0^{G(1)} \sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx = \frac{3}{4} \int_0^{2/3} (\sin t) f(t) dt = \frac{3}{4} \int_0^{2/3} \sin t \frac{e^t}{a + \sin t} dt$$

이므로

$$aG(1) + \int_0^{G(1)} \sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx = aG(1) + \frac{3}{4} \int_0^{2/3} \left[(a + \sin t) \frac{e^t}{a + \sin t} - a \frac{e^t}{a + \sin t} \right] dt$$

이다. 그런데

$$\frac{3}{4} \int_0^{2/3} \left[\frac{e^t}{a + \sin t} \right] dt = \frac{3}{4} \int_0^{2/3} f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2}f\left(\frac{2}{3}u\right) du = G(1)$$

이므로

$$\begin{aligned} aG(1) + \int_0^{G(1)} \sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx &= aG(1) + \frac{3}{4} \int_0^{2/3} e^t dt - aG(1) \\ &= \frac{3}{4}(e^{\frac{2}{3}} - 1) \end{aligned}$$

이다. 답 : $\frac{3}{4}(e^{\frac{2}{3}} - 1)$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[문제 1] 평면벡터의 성질을 이해하고 있는지를 평가

[문제 2] 내적의 의미와 성질을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

- 김창동 외 (2014), 기하와 벡터, 54-89쪽
- 류희찬 외 (2014), 기하와 벡터, 58-92쪽
- 김원경 외 (2014), 기하와 벡터, 53-93쪽

[문제 1 평가기준]

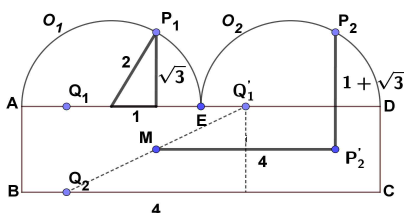
- $|\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_2Q_2}|^2$ 를 분석하여 계산이 가능하도록 변형함 (예: $4\{(\overrightarrow{MP_2'})^2 + (\overrightarrow{P_2P_2'})^2\}$) : 10점
- 답 $80 + 8\sqrt{3}$ 을 제시 : 10점

[문제 2 평가기준]

- $\overrightarrow{P_1Q_1} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2}$ 를 분석하여 계산이 가능하도록 변형함 (예: $|\overrightarrow{MP_2}|^2 - 5$) : 10점
- $\overrightarrow{P_1Q_1} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2}$ 의 최솟값 -4 를 제시 : 5점
- $\overrightarrow{P_1Q_1} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2}$ 의 최댓값 $16 + 4\sqrt{17}$ 를 제시 : 10점

□ 예시 답안

[문제 1] 점 Q_1 을 선분 AD방향으로 4만큼 이동시킨 점을 Q_1' 이라 하고, 선분 $Q_1'Q_2$ 의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AD와 평행인 직선에 내린 점 P_2 의 수선의 발을 P_2' 이라 하면



$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_2Q_2}|^2 &= |\overrightarrow{P_2Q_1'} + \overrightarrow{P_2Q_2}|^2 \\
 &= |2\overrightarrow{P_2M}|^2 \\
 &= 4\{(\overrightarrow{MP_2'})^2 + (\overrightarrow{P_2P_2'})^2\} \\
 &= 80 + 8\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

이다(그림 참조). 답 : $80 + 8\sqrt{3}$

(별해) 점 B를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하면

$$P_1(3, 2 + \sqrt{3}), P_2(7, 2 + \sqrt{3}), Q_1(1, 2), Q_2(1, 0)$$

이므로

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = (-2, -\sqrt{3}), \overrightarrow{P_2Q_2} = (-6, -2 - \sqrt{3})$$

이다. 따라서 $\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_2Q_2} = (-8, -2 - 2\sqrt{3})$ 이고

$$|\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{P_2Q_2}|^2 = 64 + 4(4 + 2\sqrt{3}) = 80 + 8\sqrt{3}$$

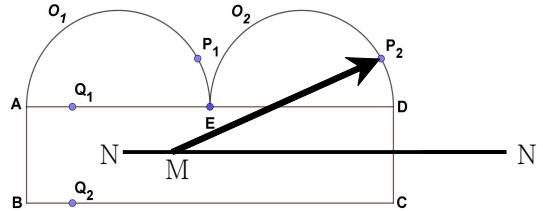
이다.

[문제 2] 점 Q_1 을 선분 AD 방향으로 4만큼 이동시킨 점을 Q_1' 이라 하고, 선분 $Q_1'Q_2$ 의 중점을 M이라 하자. 점 M을 지나고 직선 AD와 평행인 직선에 내린 점 P_2 의 수선의 발을 P_2' 이라 하면

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{P_1Q_1} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2} \\ &= \overrightarrow{P_2Q_1'} \cdot \overrightarrow{P_2Q_2} \\ &= (\overrightarrow{MQ_1'} - \overrightarrow{MP_2}) \cdot (\overrightarrow{MQ_2} - \overrightarrow{MP_2}) \\ &= |\overrightarrow{MP_2}|^2 - |\overrightarrow{MQ_2}|^2 \\ &= |\overrightarrow{MP_2}|^2 - 5 \end{aligned}$$

이다.

점 Q_1 이 선분 AD 위를 움직일 때, 점 M은 선분 BE의 중점 N과 점 N을 \overrightarrow{AD} 방향으로 8만큼 이동한 점 N' 을 끝점으로 하는 선분 위를 움직인다(그림 참조). 따라서



- (1) $|\overrightarrow{MP_2}|^2$ 의 최솟값: M이 선분 CD의 중점(Q_1 이 선분 ED의 중점)이고 P_2 가 점 D이거나, M이 EF의 중점(Q_1 이 선분 AE의 중점)이고 P_2 가 점 E인 경우이며, 이 때 $|\overrightarrow{MP_2}|^2 = 1$ 이다(단, F는 E에서 선분 BC로 내린 수선의 발이다).
- (2) $|\overrightarrow{MP_2}|^2$ 의 최댓값: M이 점 N(Q_1 이 점 A)이고 선분 P_2N 위에 반원 O_2 의 중심이 있는 경우이거나 M이 점 N' (Q_1 이 점 D)이고 선분 P_2N' 위에 반원 O_2 의 중심이 있는 경우이며, 이 때 $|\overrightarrow{MP_2}|^2 = (2 + \sqrt{17})^2 = 21 + 4\sqrt{17}$ 이다.

답 : 최솟값은 -4 , 최댓값은 $16 + 4\sqrt{17}$