단국대학교 2019학년도 모의논술고사

자연계열

문제 및 가이드답안

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 일정한 규칙에 의하여 차례로 나열된 수의 배열을 수열이라 하며, 나열된 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다. 예를 들어 첫째항에서 시작하여 차례로 일정한 수를 더하여 얻은 수열을 등차수열이라 한다.
(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 (i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$, (ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.
(다) [치환적분법] 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면 $$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

[논제 1] 두 함수 f와 g는 $f(1)=2$, $g(2)=2$이고 모든 자연수 m, n에 대하여

$$f(m+n)=f(m)f(n) \text{와 } g(mn)=g(m)+g(n)$$

을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{30}(g\circ f)(a+k)=1470$$

일 때, 자연수 a의 값을 구하시오(단, $g\circ f$는 함수 f와 g의 합성함수이다). [15점]

함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{a+\sin x}\,(a>1)$에 대하여 [논제 2]와 [논제 3]의 물음에 답하시오.

[논제 2] 함수 f가 극댓값과 극솟값을 갖도록 하는 a값의 범위를 구하시오. 이 경우 f가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\sin\alpha$, $\sin\beta$를 a에 관한 식으로 나타내시오 (단, $0<\alpha,\beta<2\pi$이다). [20점]

[논제 3] 양수 t에 대하여 점 $\mathrm{A}(t,f(t))$와 점 $\mathrm{B}(2t,0)$을 양 끝점으로 하는 선분 위에 점 C가 있다. 원점 O와 점 C를 잇는 선분 OC가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분할 때, 점 C가 나타내는 곡선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수 $G(x)=\int_0^x g(t)dt$에 대하여

$$a\,G(1)+\int_0^{G(1)}\sin\left(\frac{2}{3}G^{-1}(x)\right)dx$$

의 값을 구하시오(단, $g(0)=\dfrac{1}{2a}$이고 $G^{-1}(x)$는 $G(x)$의 역함수이다). [20점]

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

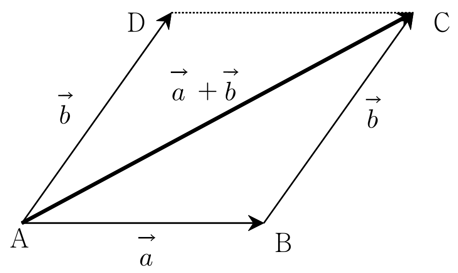
<제시문>

(가) 벡터의 덧셈

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고,

기호 $\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$로 나타낸다.



(나) 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (교환법칙)

$\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (분배법칙)

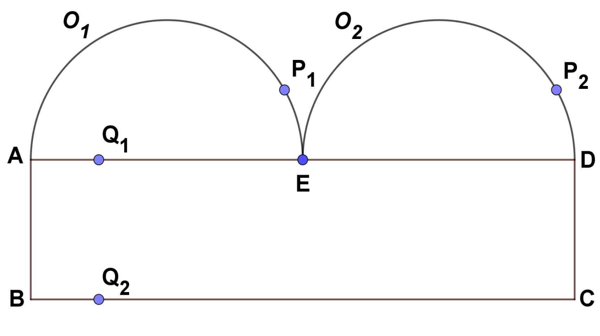
$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (결합법칙)

이 성립한다.

아래 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{AD}} = 8$인 직사각형 ABCD의 변 AD의 중점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 반원 O_1과 선분 ED를 지름으로 하는 반원 O_2가 있다.

반원 O_1 위의 점 P_1에 대하여, P_1을 지나고 직선 BC와 평행인 직선이 반원 O_2와 만나는 점 중 P_1로부터의 거리가 4인 점을 P_2라 하자.

선분 AD 위의 점 Q_1에 대하여, Q_1을 지나고 직선 AD와 수직인 직선이 선분 BC와 만나는 점을 Q_2라 하자.



다음 [논제 1]과 [논제 2]의 물음에 답하시오.

[논제 1] $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{AD} = 30^\circ$ 이고 $\overline{\mathrm{AQ}_1} = 1$일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1} + \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}\right|^2$의 값을 구하시오. [20점]

[논제 2] 내적 $\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}$의 최솟값과 최댓값을 구하시오. [25점]