문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 미분법을 활용하여 거리에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 이차곡선의 성질을 활용하여 기하학적 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 삼각함수의 성질을 활용하여 이차곡선의 접선을 구하는 계산능력을 평가

□ 자료출처

○ 신항균 외 (2015), 수학 II, 188-207쪽
○ 류희찬 외 (2015), 기하와 벡터, 14-21쪽, 41-44쪽
○ 신항균 외 (2015), 미적분 I, 118-124쪽
○ 김창동 외 (2015), 미적분 II, 83-89쪽

[논제 1 평가기준]

- $f(t)$ 또는 $f(t)^2$ 을 제시 : 5점
- $t=\frac{\pi}{2}$ 임을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]

- A가 원의 일부임을 제시: 8점
- $\mathrm{D}(-2, 2\sqrt{3})$을 제시: 7점

[논제 3 평가기준]

- 근과 계수의 관계: $k_1+k_2=\frac{2ab}{a^2-2}$, $k_1k_2=\frac{b^2-1}{a^2-2}$를 제시: 5점
- $\tan(\alpha-\beta)$의 공식으로부터 $\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=1$ 임을 제시: 5점
- $\mathrm{D}(-\sqrt{7}, \sqrt{2})$를 제시: 5점

□ 예시 답안

[논제1] 두 점 사이의 거리 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 는 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$ 과 같은 증가 감소의 경향을 보이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$ 의 극댓값을 찾는다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \left(\sqrt{2}\cos t - \sqrt{2}\cos 2t\right)^2 + (\sin t - \sin 2t)^2\\ &= \left(\cos^2 t + \cos^2 2t\right) - 2\left(2\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t\right) + 2\end{aligned}$$

이고, $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t$를 대입하면,

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \left\{\cos^2 t + \left(2\cos^2 t - 1\right)^2\right\} - 2\left\{2\cos t\left(2\cos^2 t - 1\right) + \sin t\left(2\sin t\cos t\right)\right\} + 2$$

이다. $u = \cos t$로 치환하면 $0 < t < \pi$ 로부터 $-1 < u < 1$이고,

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 4u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3$$

을 얻는다. 따라서 $F(u) = 4u^4 - 4u^3 - 3u^2 + 3$라 하면

$$\frac{d}{du}F(u) = 16u^3 - 12u^2 - 6u = 0$$

이려면 $u = 0$ 또는 $u = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{8}$ 이어야 한다. $-1 < u < 1$이므로 $u = \cos t = 0, \dfrac{3-\sqrt{33}}{8}$ 을 얻는다.

$\cos t_0 = \dfrac{3-\sqrt{33}}{8}$, $(0 < t_0 < \pi)$이라 하면 함수 $y = \cos t$는 구간 $(0, \pi)$에서 감소함수이고 삼차함수 $F(u)$의 증감은 다음과 같다.

u	-1		$\frac{3-\sqrt{33}}{8}$		0		1
$F(u)$		↘		↗		↘	

따라서 <제시문> (나)에 의하여 함수 $f(t)^2 = F(\cos t)$의 증감은 다음과 같다.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		t_0		π
$F(\cos t)$		↗		↘		↗	

그러므로 $t = \dfrac{\pi}{2}$일 때 함수 $f(t)$는 극대이다. 답: $t = \dfrac{\pi}{2}$

[논제2] 주어진 포물선 $8(x+2) = y^2$의 초점은 원점 O이고 준선은 $x = -4$이다. 따라서 포물선의 정의에 의하여, 원점 O와 점 $\mathrm{D}(a, b)$ 사이의 거리 d는

$d = \overline{\mathrm{OC}}$ +(원의 반지름의 길이)

= (C 에서 직선 $x = -4$ 까지의 거리)+(원의 반지름의 길이)

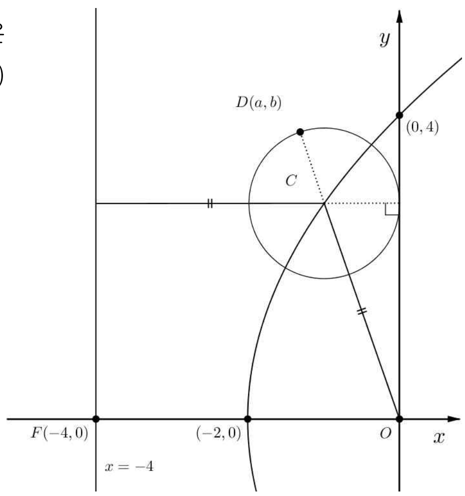
= (C 에서 직선 $x = -4$ 까지의 거리) +(C 에서 직선 $x = 0$ 까지의 거리)

$= 4$

이므로 A에 속하는 $\mathrm{D}(a, b)$는

$$a^2 + b^2 = 16,\ (-4 < a < 0,\ 0 < b < 4)$$

를 만족시킨다.



또한 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(-4-a,\ -b)$, $\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(-a,\ -b)$ 이므로

$$8=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=a(a+4)+b^2$$

을 만족시키려면 $a=-2$, $b^2=12$이어야 한다. 그러므로 구하는 2사분면의 점 D의 좌표는 $(-2,2\sqrt{3})$ 이다. 답: $\mathrm{D}(-2,2\sqrt{3})$

[논제3] 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 $\mathrm{D}(a,b)$를 지나고 타원 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$에 접하는 직선의 기울기를 k라 하자. <제시문> (가)에 의해서 직선의 방정식은 $y=kx\pm\sqrt{2k^2+1}$이므로

$$b=ka\pm\sqrt{2k^2+1}$$

에서

$$(a^2-2)k^2-2abk+b^2-1=0$$

이다. 이 방정식의 두 해를 k_1, k_2 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터

$$k_1+k_2=\frac{2ab}{a^2-2},\quad k_1k_2=\frac{b^2-1}{a^2-2} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. 한편, 기울기가 k_1인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α, 기울기가 k_2인 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 β라 하면, $k_1=\tan\alpha$이고 $k_2=\tan\beta$이다. 두 직선이 이루는 각의 크기가 45°이므로

$$1=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이다. 식 ①을 ②에 대입하면 $a^2+b^2=9$이므로 $b^2=2$이다. 점 (a,b)는 제2사분면 위에 있으므로, $b=\sqrt{2}$, $a=-\sqrt{7}$ 이다. 답: $\mathrm{D}(-\sqrt{7},\sqrt{2})$

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 로그의 성질을 이해하고 확률의 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 정적분법의 개념을 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 치환적분을 이용하여 정적분으로 정의된 함수에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외 (2015), 확률과 통계, 28-35쪽
○ 조도현 외 (2015), 수학 II, 200-219쪽
○ 이강섭 외 (2015), 미적분 I, 156-175쪽
○ 정상권 외 (2015), 미적분 II, 39-42, 168-174쪽

[논제 1 평가기준]
- 자연수가 되기 위해서는 a_i가 $1, 2$, 4 또는 5이여야 함을 제시 : 5점
- $s+2t=k$, $s+t \le 10-k$ 임을 제시: 5점
- 경우의 수 13을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{4}\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$ 임을 제시: 8점
- $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$을 제시: 7점

[논제 3 평가기준]
- (1)의 식에서 $t\sqrt{x}$를 치환하여 $f(x)$를 제시: 5점
- (2)의 식에서 $t\sqrt{x}$를 치환하여 $g(x)$를 제시: 5점
- $g(x)=-g(-x)$임을 제시 : 10점
- $f(3)+f(-3)$의 최솟값이 2임을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제1] $\sum_{i=1}^{10} \log a_i = k$($k$는 자연수)라 하자. 로그의 성질에 의하여

$$\sum_{i=1}^{10} \log a_i = \log a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10}$$

이므로

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{10} = 2^k \cdot 5^k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이다. 따라서 ①의 식이 성립하기 위해서 a_i는 $1, 2, 4$ 또는 5이다.

a_i가 2인 a_i의 개수를 s, a_i가 4인 a_i의 개수를 t, a_i가 5인 a_i의 개수를 k라 하면

$$2^s \cdot 4^t \cdot 5^k = 2^k \cdot 5^k$$

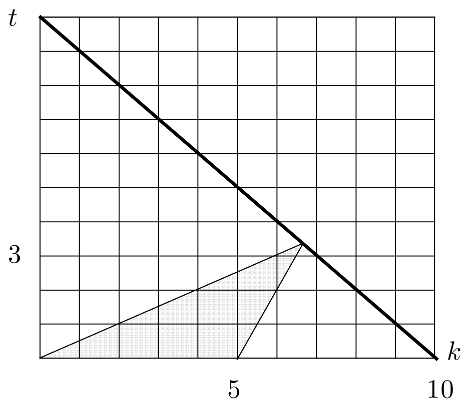
이므로

$$s + 2t = k,\ s + t \le 10 - k,$$

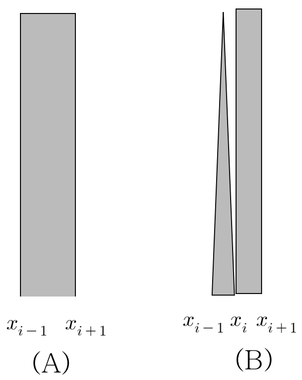
이다. $s \ge 0$, $t \ge 0$, $k \ge 0$ 이므로 s를 소거한 부등식

$$t \ge 0,\ k \ge 0,\ k - 2t \ge 0,\ 10 - k - t \ge 0,\ t \ge 2k - 10$$

을 만족시키는 영역을 $k-t$평면에 나타내면 아래의 색칠한 부분이다.



따라서 조건을 만족시키는 (k, t)의 개수는 13이고, $s + 2t = k$이므로 s는 각 (k, t)에 의하여 유일하게 결정된다. 구하는 경우의 수는 13이다. 답: 13



[논제2] 그림 (B)의 색칠한 부분의 넓이는 (A)의 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{3}{4}$이다. 따라서 네 점

$$(x_{k-1}, 0),\ (x_k, 0),\ (x_{k-1}, f(x_{k-1})),\ (x_k, f(x_{k-1}))$$

을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이를 c_k라 하면

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k = \int_0^1 f(x)\,dx$$

이므로

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{3}{4} c_k = \frac{3}{4} \int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$$

이다.

한편, $\sqrt{x} = y$로 치환하면

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 2y\cos y\,dy$$

$$= \Big[\,2y\sin y\Big]_0^1 - \int_0^1 2\sin y\,dy = 2\sin 1 + 2(\cos 1 - 1)$$

이므로 $\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{2m} b_i = \frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$ 이다. 답: $\frac{3}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$

[논제3] (1)의 식에서 $x\sqrt{t} = s$로 치환하면 $\sqrt{t} = \frac{s}{x}$, $\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{x}ds$ 이므로

$$\int_0^1 \sqrt{t}\,f(x\sqrt{t})dt = \int_0^x \frac{s}{x}f(s)\frac{2s}{x^2}ds = \frac{2}{3}e^{g(x)}$$

이고 정리하면

$$\int_0^x s^2 f(s)ds = \frac{x^3}{3}e^{g(x)}$$

이다. 양변을 x에 관하여 미분하여 정리하면

$$f(x) = e^{g(x)} + \frac{x}{3}e^{g(x)}g'(x)$$

이다. 함수 $f(x)$에 $x=3$을 대입하면 다음과 같다.

$$f(3)+f(-3) = [e^{g(3)} + e^{g(-3)}] + [e^{g(3)}g'(3) - e^{g(-3)}g'(-3)] \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

$H(x) = \ln\left|\frac{h(-x)}{h(x)}\right|$ 라 하고, (2)로부터 위와 같은 치환적분법을 사용하면

$$\int_0^x s\,g(s)ds = \frac{x^2}{2}H(x) + \frac{1}{2}x^{2+f(0)}$$

이다. 양변을 x에 관하여 미분하여 정리하면

$$g(x) = H(x) + \frac{x}{2}H'(x) + \frac{2+f(0)}{2}x^{f(0)}$$

이다. (1)의 식에 $x=0$을 대입하면

$$\int_0^1 \sqrt{t}\,f(0)dt = f(0)\int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}e^{g(0)}$$

에서 $f(0) = e^{g(0)}$이므로 $f(0) \neq 0$이다. 또한 (2)의 식에 $x=0$을 대입하면

$$\int_0^1 g(0)dt = g(0)\int_0^1 dt = 0$$

이므로 $g(0)=0$이고 $f(0)=1$이다. 따라서

$$g(x) = H(x) + \frac{x}{2}H'(x) + \frac{3}{2}x \text{ 이고 } g(-x) = H(-x) - \frac{x}{2}H'(-x) - \frac{3}{2}x$$

이다. 한편

$$H(-x) = \ln\left|\frac{h(x)}{h(-x)}\right| = \ln\left|\frac{h(-x)}{h(x)}\right|^{-1} = -\ln\left|\frac{h(-x)}{h(x)}\right| = -H(x)$$

이고, 합성함수의 미분법에 의하여

$$H'(-x) = H'(x)$$

이다. 그러므로

$$g(-x) = -H(x) - \frac{x}{2}H'(x) - \frac{3}{2}x = -g(x)$$

이므로, 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) = -g(-x)$$

이고, 또한 모든 실수 x에 대하여

$$g'(x) = g'(-x)$$

이므로 $g'(3) = g'(-3) = 0$이다. 식 ①로부터 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$f(3) + f(-3) = e^{g(3)} + e^{-g(3)} \geq 2\sqrt{e^{g(3)}\frac{1}{e^{g(3)}}} = 2$$

이므로 구하는 최솟값은 2이다. 답: 2

[참고] $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, $h(x) = e^{\frac{x}{2}}$은 조건 (1), (2), (3)을 만족시킨다.