단국대학교 2018학년도 모의논술고사

자연계열

문제 및 가이드답안

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

<제시문>

(가) 현수교 케이블의 모양, 행성과 혜성의 궤도 등과 같이 생활 주변이나 자연 현상에 나타나는 여러 가지 곡선에는 포물선, 타원 등이 있다.

① 좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(p, 0)$와 직선 $x=-p$에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 하고, 이 포물선을 방정식으로 나타내면 $y^2=4px\,(p \neq 0)$이다.

② 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(-c, 0), \mathrm{F}'(c, 0)$에서 거리의 합이 $2a$로 일정한 점들의 집합을 타원이라 하고, 이 타원을 방정식으로 나타내면 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$이다.

③ 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 기울기가 k인 직선의 방정식은 $y=kx \pm \sqrt{a^2k^2+b^2}$ 이다.

(나) 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 합성함수 $g \circ f(x)$의 증가와 감소에 대한 다음 성질을 갖는다.

- $g(x)$가 증가함수일 때, $f(x)$가 증가하면 $g \circ f(x)$는 증가하고 $f(x)$가 감소하면 $g \circ f(x)$도 감소한다.
- $g(x)$가 감소함수일 때, $f(x)$가 증가하면 $g \circ f(x)$는 감소하고 $f(x)$가 감소하면 $g \circ f(x)$는 증가한다.

(다) 좌표평면에서 곡선 위의 점을 매개변수로 나타내면 편리하다. 매개변수 방정식

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t \quad (0 \le t < 2\pi)$$

는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$를 매개변수 t를 사용하여 나타낸 것이다.

[논제 1] 좌표평면 위를 움직이는 점 P와 점 Q의 시각 t에서의 위치를 각각

$$(\sqrt{2}\cos t, \sin t),\ (\sqrt{2}\cos 2t, \sin 2t)$$

라 하자. $t\,(0<t<\pi)$에서 두 점 P와 Q사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$가 극댓값을 갖게 하는 t의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] 좌표평면에서 포물선 $8(x+2)=y^2$의 초점을 F라 하자. 초점 F와 이 포물선 위의 점 $\mathrm{C}(x,y)$ $(-2<x<0)$를 지나는 직선 ℓ에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 D의 집합을 A라 하자.

D는 중심이 $\mathrm{C}(x,y)$이고 y축에 접하는 원과 ℓ의 교점 중 원점으로부터 먼 거리에 있는 2사분면의 점이다.

원점 O와 점 $\mathrm{B}(-4,0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DO}}=8$을 만족시키는 집합 A의 원소 D의 좌표를 구하시오. (15점)

[논제 3] 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점 D에서 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 45°일 때, 점 D의 좌표를 구하시오.(단, 점 D는 2사분면에 있다) (15점)

[문제2] 다음 <제시문>을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

<제시문>

(가) 별의 밝기, 소리의 크기, 지진의 규모 등과 같은 자연 현상을 해석할 때 로그를 사용하면 편리하다. 일반적으로 $a>0,\ a\neq 1$일 때, 양수 x에 대하여 $a^y = x$을 만족시키는 실수 y를 $y=\log_a x$로 나타내고 a를 밑으로 하는 x의 로그라고 한다. 이와 같이 양의 실수 전체의 집합에서 로그함수 $y=\log_a x$를 정의할 수 있다. 특히, $a=10,\ e$인 경우의 로그함수를 각각 $y=\log x$, $y=\ln x$로 나타낸다. 로그함수의 성질

① $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$,

② $\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$

를 이용하면, 함수 $f(x)$에 대하여 $G(x) = \ln\left|\dfrac{f(-x)}{f(x)}\right|$라 할 때 다음이 성립한다.

③ $G(-x) = -G(x)$

(나) 좌표평면에서 곡선 $y=f(x)\,(f(x)\geq 0)$과 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 영역 S의 넓이를 구분구적법을 사용하여 구할 수 있다. 이 개념을 음수의 함숫값을 갖는 함수까지 일반화한 것이 정적분이다. 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 자연수 n에 대하여 구간 $[a,\ b]$를 n등분한 각 분할점의 x좌표를 차례로 $a=x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$ 라 하자. 이때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}$$

를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이를 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다.

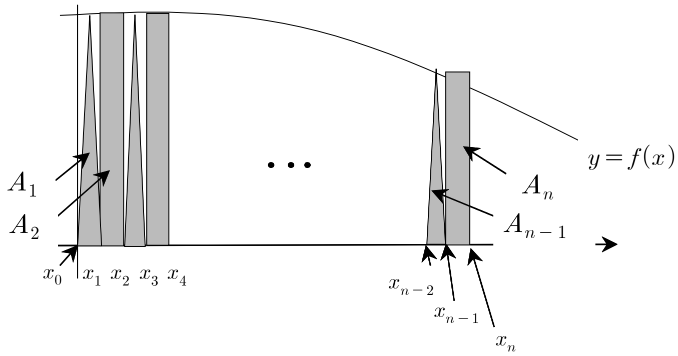
(다)구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 구간 $[0,1]$을 n등분한 양 끝점과 분할점을 차례로

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n=1$$

이라 하고, $m_i = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$라 하자. $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$를

- i가 홀수일 때, 세 점 $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, $(m_i, f(x_{i-1}))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형,
- i가 짝수일 때, 네 점 $(x_{i-1},0)$, $(x_i,0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-2}))$, $(x_i, f(x_{i-2}))$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형

이라 하자. $n(=2m)$이 짝수인 경우일 때 $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$는 다음과 같다.



[논제 1] 10개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수를 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$이라 할 때,

$$\sum_{i=1}^{10} \log a_i$$

의 값이 자연수일 경우의 수를 구하시오. (15점)

[논제 2] <제시문> (다)에서 함수 $f(x) = \cos\sqrt{x}$ 이고 A_i의 넓이를 b_i라 할 때,

$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{2m} b_i$의 값을 구하시오. (15점)

[논제 3] 다음 조건

(1) $\int_0^1 \sqrt{t}\, f(x\sqrt{t})dt = \frac{2}{3}e^{g(x)}$
(2) $\int_0^1 g(x\sqrt{t})dt = \ln\left\lvert\frac{h(-x)}{h(x)}\right\rvert + x^{f(0)}$
(3) $g(x), h(x)$는 이계도함수를 갖고 $g'(3) = 0$ 이다.

를 만족시키는 세 함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여

$$f(3) + f(-3)$$

의 최솟값을 구하시오. (25점)