단국대학교 2017학년도전형 모의논술고사

자연계열
해설 및 가이드답안

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 위치벡터의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 벡터로 표현된 점의 기하학적 의미를 파악하고 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 벡터를 이용하여 일정한 규칙에 의하여 얻어지는 삼각형들이 공통적으로 갖고 있는 기하학적 성질을 파악할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 신항균 외 (2015), 수학I, 132-145쪽
○ 조도연 외 (2015), 수학I, 156-173쪽
○ 우정호 외 (2015), 기하와 벡터, 184-188쪽
○ 황선욱 외 (2015), 기하와 벡터, 130-131쪽

[논제 1 평가기준]

- $\overrightarrow{A_1A_2}$와 $\overrightarrow{B_1B_2}$를 $\overrightarrow{A_1B_1}$과 $\overrightarrow{A_1C_1}$으로 표현된 식을 제시: 5점
- $a=-\frac{2}{5}$, $b=1$을 제시: 5점

[논제 2 평가기준]

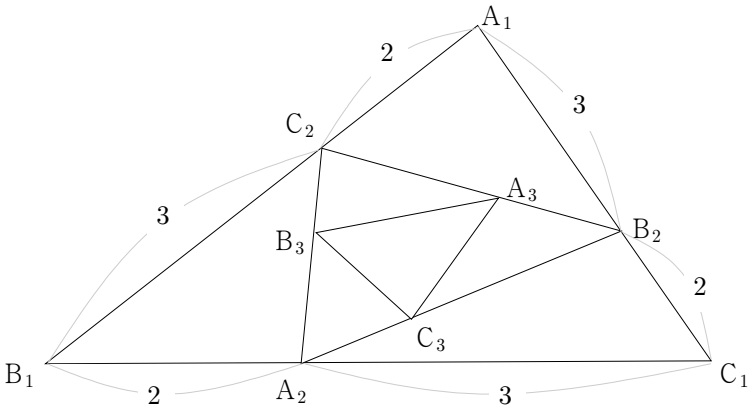
- $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} = \frac{7}{25}\triangle A_nB_nC_n$ 임을 제시: 5점
- $\triangle A_3B_3C_3 = 49$ 임을 제시: 5점

[논제 3 평가기준]

- 점 P가 삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심임을 설명하거나 점 P의 좌표를 제시: 15점
- $\triangle PA_1B_1 = \frac{625}{3}$ 임을 제시: 5점

□ 예시 답안

점 A_n, B_n, C_n의 정의로부터 점 A_{n+1}은 선분 B_nC_n을 $2:3$으로 내분하는 점, 점 B_{n+1} 은 선분 C_nA_n을 $2:3$으로 내분하는 점, 점 C_{n+1}은 선분 A_nB_n을 $2:3$으로 내분하는 점임을 알 수 있다.

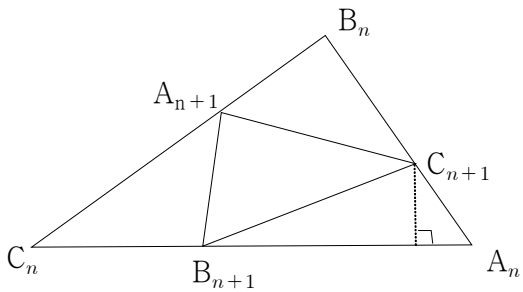


[논제1] $\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{A_1B_1} + 2\overrightarrow{A_1C_1}\right)$ 이고

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \frac{1}{5}\left(3\overrightarrow{B_1C_1} + 2\overrightarrow{B_1A_1}\right) = \frac{1}{5}\left\{3\left(\overrightarrow{A_1C_1} - \overrightarrow{A_1B_1}\right) - 2\overrightarrow{A_1B_1}\right\}$$

이므로 $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$ 이다. 따라서 $a = -\frac{2}{5}$, $b = 1$이다.

[논제2] 삼각형 ABC의 넓이를 $\triangle ABC$로 나타내자.
그림으로부터



$$\begin{aligned}\triangle A_nB_{n+1}C_{n+1} &= \frac{1}{2}\overline{A_nB_{n+1}} \cdot \overline{A_nC_{n+1}}\sin\angle A_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\overline{A_nC_n}\right)\left(\frac{2}{5}\overline{A_nB_n}\right)\sin\angle A_n \\ &= \frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n\end{aligned}$$

이다. 같은 방법으로

$$\triangle B_nA_{n+1}C_{n+1} = \triangle C_nB_{n+1}A_{n+1} = \frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} = \triangle A_nB_nC_n - 3\times\frac{6}{25}\triangle A_nB_nC_n = \frac{7}{25}\triangle A_nB_nC_n$$

이므로

$$\triangle A_3B_3C_3 = \frac{7}{25}\triangle A_2B_2C_2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2\triangle A_1B_1C_1 = 49$$

이다.

[논제3] $\overrightarrow{OA_n} = (p_n, q_n)$, $\overrightarrow{OB_n} = (r_n, s_n)$, $\overrightarrow{OC_n} = (t_n, u_n)$이라 하면 주어진 조건 ②에 의하여 다음이 성립한다.

$$p_n + r_n + t_n = p_{n+1} + r_{n+1} + t_{n+1}$$
$$q_n + s_n + u_n = q_{n+1} + s_{n+1} + u_{n+1}$$

따라서 삼각형 $A_nB_nC_n$의 무게중심과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 무게중심은 동일하다.

조건으로부터 $n \to \infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{A_nP}$, $\overline{B_nP}$, $\overline{C_nP}$가 모두 0으로 수렴하므로 점 P의 좌표를 (α, β)라 하면,

$$p_n \to \alpha,\ r_n \to \alpha,\ t_n \to \alpha,\ q_n \to \beta,\ s_n \to \beta,\ u_n \to \beta$$

이다. 따라서

$$\frac{p_1 + r_1 + t_1}{3} = \frac{p_n + r_n + t_n}{3} \to \alpha$$
$$\frac{q_1 + s_1 + u_1}{3} = \frac{q_n + s_n + u_n}{3} \to \beta$$

이므로 $\alpha = \dfrac{p_1 + r_1 + t_1}{3}$, $\beta = \dfrac{q_1 + s_1 + u_1}{3}$이다. 그러므로 점 P는 삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심이고 삼각형 PA_1B_1의 넓이는 $\dfrac{625}{3}$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 함수의 그래프를 파악하여 적분으로 표현된 함수의 극값의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 적분으로 표현된 함수의 그래프를 그릴 수 있는지를 평가

[논제 3] 정적분의 기본정리와 치환적분을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 정상권 외 (2015), 미적분 I, 173-182쪽
○ 우정호 외 (2015), 미적분 II, 154-159, 206-209, 218-222쪽
○ 이강섭 외 (2015), 미적분 II, 128-134, 166-181쪽

[논제 1 평가기준]
- $H'(x)=f(g(x))g'(x)$임을 제시: 5점
- $x=1$, $x=5$에서 극값을 가짐을 제시: 5점
- $a=2, b=5$임을 제시: 10점

[논제 2 평가기준]
- 3구간으로 나누어서 적분함수 $A(x)$을 제시: 10점
- $A(x)$의 최솟값 $e-2\sqrt{e}+1$을 제시: 5점
- 그래프의 개형을 제시: 5점

[논제 3 평가기준]
- $x-t$를 치환하여 $F(x)$를 치환된 식으로 제시: 8점
- $F'(x)$를 제시: 8점
- $f(1)=\dfrac{e}{4}$을 제시: 4점

□ 예시 답안

[논제1] 함수 $H(x)$의 극값은 $H'(x)=f(g(x))g'(x)=0$을 만족시키는 x에서 갖는다.
$f(g(x))=0$으로부터 $g(x)=4$, 즉 $x=5$이다. 또한 $g'(x)=0$으로부터 $x=1$이다.
따라서 $H(x)$의 극값은 $x=1$ 또는 $x=5$에서만 가질 수 있다.

(i) $x=1$
x가 증가하면서 $x=1$을 지날 때
$f(g(x))$의 부호는 계속 양이고,
$g'(x)$의 부호는 음에서 양으로 변한다.
따라서 $H'(x)$의 부호는 음에서 양으로 변하므로 $H(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

(ii) $x=5$
x가 증가하면서 $x=5$를 지날 때
$f(g(x))$의 부호는 양에서 음으로 변하고,
$g'(x)$의 부호는 계속 양이다.
따라서 $H'(x)$의 부호는 양에서 음으로 변하므로 $H(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 갖는다.

조건으로부터 $H(1)=\int_a^{g(1)} f(t)\,dt=0$이므로 $a=g(1)=2$이다. 즉 $a=2$, $b=5$이다.

[논제2] $0\le t\le 1$일 때 $1-x\le e^t-x\le e-x$ 이므로
(i) $x<1$, (ii) $1\le x<e$, (iii) $e\le x$
의 3가지 경우로 나누어 생각한다.

(i) <u>$x<1$인 경우</u>

$e^t>x$ 이므로 $A(x)=\int_0^1 (e^t-x)\,dt=-x+e-1$ 이다.

(ii) <u>$1\le x<e$인 경우</u>

$e^t=x$로부터 $t=\ln x$를 얻는다.
$0\le t<\ln x$일 때 $e^t\le x$ 이고, $\ln x\le t<1$일 때, $e^t\ge x$이므로

$$A(x)=\int_0^{\ln x}(x-e^t)\,dt+\int_{\ln x}^1 (e^t-x)\,dt$$
$$=2x\ln x-3x+e+1$$

이다.

(iii) <u>$e\le x$인 경우</u>

$e^t\le x$ 이므로 $A(x)=\int_0^1 (x-e^t)\,dt=x-e+1$ 이다.

(i), (ii), (iii)으로부터

$$A(x)=\int_0^1 |e^t-x|\,dt=\begin{cases}-x+e-1 & (x<1)\\ 2x\ln x-3x+e+1 & (1\le x<e)\\ x+1-e & (x\ge e)\end{cases}$$

이다.

이제 $A(x)$의 그래프를 그리자.

① $A(x)$의 정의역

모든 실수 x에 대하여 $A(x)$가 존재하므로 함수 $A(x)$의 정의역은 실수집합이다.

② 그래프의 증가와 감소, 극댓값과 극솟값

$x \le 1$에서 $A(x)$는 감소하는 일차함수이고 $A(1)=e-2$이다.

$x \ge e$에서 $A(x)$는 증가하는 일차함수이고 $A(e)=1$이다.

$1<x<e$에서 $A'(x)=2\ln x-1$이다. $A'(x)=0$으로부터

$A(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 극값 $e-2\sqrt{e}+1$을 갖는다.

③ 그래프의 볼록 방향과 변곡점

$1<x<e$에서 $A''(x)=\dfrac{2}{x}>0$ 이므로 이 구간에서 아래로 볼록하다. 따라서

$A(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1$은 극솟값이다.

④ x축, y축의 교점, 대칭성과 주기

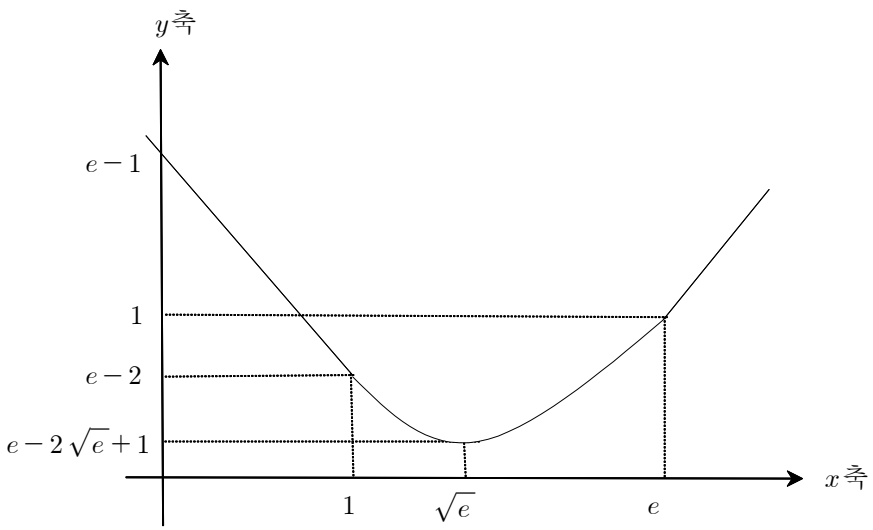
(i) $x<1$에서는 x절편은 없고, y절편은 $y=e-1$

(ii) $x \ge e$에서는 x, y 축과 만나지 않는다.

(iii) $1 \le x < e$에서는 아래로 볼록하고 극솟값이 $A(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2>0$ 이므로 x축과 만나지 않는다.

⑤ $\lim_{x\to-\infty} A(x)=\lim_{x\to\infty} A(x)=\infty$이다.

따라서 $A(x)$의 최솟값은 $e-2\sqrt{e}+1$이고, $y=A(x)$의 그래프는 아래와 같다.



[논제3] $x-t=s$로 치환하면 치환적분법으로부터

$$F(x)=\int_0^x \frac{e^{x+t}}{f(x-t)}\,dt=-\int_x^0 \frac{e^{2x-s}}{f(s)}\,ds=\int_0^x \frac{e^{2x-s}}{f(s)}\,ds=e^{2x}\int_0^x \frac{e^{-s}}{f(s)}\,ds$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2e^{2x}\int_0^x \frac{e^{-s}}{f(s)}\,ds+e^{2x}\frac{e^{-x}}{f(x)} \\ &= 2F(x)+\frac{e^{x}}{f(x)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (*) \end{aligned}$$

이다. 한편 $F(x)$가 $x=1$에서 극값 -2를 가지므로 $F'(1)=0$, $F(1)=-2$가 되어, (*)로 부터

$0=2(-2)+\dfrac{e}{f(1)}$ 를 얻는다. 따라서 $f(1)=\dfrac{e}{4}$이다.