

[문제 1]

[문제 1]

조건 ②에 따라, $\vec{AA}_2 = \frac{1}{2}(\vec{OB}_1 + 2\vec{OC}_1) - \vec{OA}_1 = \vec{OB}_1 - \vec{OA}_1$, $\vec{BB}_2 = \frac{1}{2}(\vec{OC}_1 - 2\vec{OA}_1) - \vec{OB}_1$.

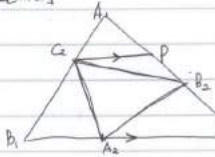
또한 $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$ 이므로,

$$\vec{AA}_2 + \vec{BB}_2 = -\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1, \quad a\vec{AB} + b\vec{AC} = -(a+b)\vec{OA} + a\vec{OB} + b\vec{OC}$$

$\vec{AA}_2 + \vec{BB}_2 = \vec{AC}$ $a\vec{AB} + b\vec{AC}$ 이어야 하므로 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ 이다.

$\therefore a = -\frac{1}{2}, b = 1$

[문제 2]



삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이를 살펴보면, 점 C_1 에서 B_1C_1 에 평행하게 그른 직선이 A_1C_1 과 만나는 점을

P 라고 하면 $\vec{AP} : \vec{AC}_1 = \vec{A_1C_1} : \vec{A_1B_1} = 2 : 5$ 이다. 따라서 삼각형 A_1CP 의 넓이는

625의 $\frac{2}{5} = 250$ 이다. 직선 B_1C_1 에 평행하게 그른 삼각형 A_1CP 와 A_1CB_1 는

높이가 동일하고 밑변의 길이가 2:3 이므로 삼각형 A_1CP 의 넓이는 $100 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{3}$ 이다.

이와 직선 B_1C_1 에서 동일하므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이 $U = 625 = 625 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 625 \times \frac{3}{2} = 937.5$ 이다.

(삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이) $= 625 - 625 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 625 - 625 \times \frac{2}{9} = 625 \times \frac{7}{9}$ 이다.

삼각형 $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ 에서 같은 비율로 넓이가 감소한다. 따라서 (삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이) $= 625 \times \frac{7}{9} = 49$.

$\therefore 49$

[문제 3]

삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 무게중심을 G_1 , 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 무게중심을 G_2 , ... 라고 할 때,

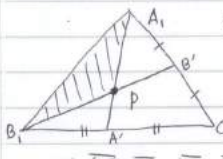
$\vec{OG}_1 = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1)$ 이다. ~~전제~~ 주어진 조건 ②에 따라,

$$\vec{OG}_2 = \frac{1}{3}(\vec{OA}_2 + \vec{OB}_2 + \vec{OC}_2) = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1) + \frac{1}{3}(\vec{OB}_1 - \vec{OA}_1) + \frac{1}{3}(\vec{OC}_1 - \vec{OB}_1) = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1) = \vec{OG}_1$$

즉 $G_1 = G_2 = \dots = G_n$ 이다. (단 $n = 1, 2, 3, \dots$) 그런데 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 넓이는 [문제 2]에서 구한 결과와 같이 점점

작아져 0에 수렴하므로 모든 $A_nB_nC_n$ 이 공유하는 한 점인 G_n 으로 수렴한다. 즉, $P = G_n$ 이 $A_nB_nC_n$ 의 무게중심이다 할 수 있다.

그런데 $\vec{AP} : \vec{BP} : \vec{CP}$ 의 길이가 모두 0으로 수렴하므로 $A_nB_nC_n$ 은 모두 점 P 로 수렴한다. 즉, $P = G_n$, $\vec{OP} = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1)$ 이다.



A_1C_1 의 중점과 B_1C_1 의 중점을 각각 B', N 이라고 하면, $\vec{OA}' = \frac{1}{2}(\vec{OB}_1 + \vec{OC}_1)$, $\vec{OB}' = \frac{1}{2}(\vec{OA}_1 + \vec{OC}_1)$ 이다.

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1), \quad \vec{A'P} = -\vec{OA}' + \vec{OB}' + \vec{OC}_1$$

$$\vec{B'P} = \vec{OB}' - \vec{OA}' = \vec{OA}_1 - \vec{OB}_1$$

$$\vec{A'P} = \frac{1}{3}(\vec{OA}_1 - \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1), \quad \vec{B'P} = \vec{OA}_1 - \vec{OB}_1$$

따라서 $\vec{A'P} : \vec{B'P} = \vec{AP} : \vec{BP} = 2 : 1$ 이다. 또한 $\vec{BA}' = \vec{A'P}$ 이므로,

$$\therefore (\text{삼각형 } \triangle PA'B_1 \text{의 넓이}) = 625 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 625 \times \frac{1}{3}$$

$\therefore \frac{625}{3}$

문제	등급	평가
문제1	A	모든 과정에서 논리적인 방법으로 바른 답안을 도출하였음.

[문제 1]

[문제 1] $\vec{A_1A_2} = \frac{3}{5}\vec{A_1B_1} + \frac{2}{5}\vec{A_1C_1}$, $\vec{B_1B_2} = \frac{3}{5}\vec{B_1C_1} + \frac{2}{5}\vec{B_1A_1}$, $(\vec{B_1C_1} = \vec{A_1C_1} - \vec{A_1B_1})$

$$\begin{aligned} \vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} &= \frac{3}{5}\vec{A_1B_1} + \frac{2}{5}\vec{A_1C_1} + \frac{3}{5}\vec{B_1C_1} + \frac{2}{5}\vec{B_1A_1} \\ &= \frac{1}{5}\vec{A_1B_1} + \frac{2}{5}\vec{A_1C_1} + \frac{3}{5}(\vec{A_1C_1} - \vec{A_1B_1}) \\ &= -\frac{2}{5}\vec{A_1B_1} + \vec{A_1C_1} \end{aligned} \quad \therefore a = -\frac{2}{5}, b = 1$$

[문제 2] $\Delta A_1B_1C_1 = 625$, $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$ 은 모두 삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 일정한 내분점들이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이와 삼각형 $A_2B_2C_2$ 와 삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 넓이와 관계가 일정하다.

$\Delta A_2B_2C_2$ 의 넓이 = $625 -$ 삼각형 $A_1C_2B_2 -$ 삼각형 $B_1A_2C_2 -$ 삼각형 $A_2C_1B_2$ 이다.

$$\Delta A_1C_2B_2 = \frac{2}{5} \cdot \Delta A_1B_1C_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot 625 = \frac{6}{25} \cdot 625 = 150$$

$$\Delta B_1A_2C_2 = \frac{2}{5} \cdot \Delta B_1C_1C_2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \cdot \Delta A_1B_1C_1 = \frac{6}{25} \cdot 625 = 150$$

$$\Delta A_2C_1B_2 = \frac{3}{5} \cdot \Delta B_1B_2C_1 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \cdot \Delta A_1B_1C_1 = \frac{6}{25} \cdot 625 = 150$$

\therefore 삼각형 $A_2B_2C_2 = 125$

이 넓이는 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 $\frac{1}{5}$ 배한 값이므로 따라서 $\frac{1}{5}$ 배를 하면 $\Delta A_3B_3C_3$ 의 넓이 = $\frac{1}{5} \times 125 = 25$ 를 구할 수 있다.

$\therefore A_3B_3C_3$ 의 넓이 = 25

[문제 3] 조건 ㉠의 3개의 식을 모두 더하면 $\vec{OA_n} + \vec{OB_n} + \vec{OC_n} = \vec{OP_n} + \vec{OP_n} + \vec{OP_n}$ 이라는 식이 나온다.

분해하면 $\vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP} = \vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP}$ 이다. \dots ㉡

$n \rightarrow \infty$ 일때, 선분의 길이 $\vec{A_nP}, \vec{B_nP}, \vec{C_nP}$ 가 0으로 수렴하므로 $n \rightarrow \infty$ 일때 $\vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP} = 0$ 이다.

그러므로 ㉡ 식에 따라 $\vec{A_nP} + \vec{B_nP} + \vec{C_nP} = 0$ 일관 함수이다.

$$\vec{A_nP} = \vec{PB_n} + \vec{PC_n}$$

$$\frac{2}{3}\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{PB_1} + \vec{PC_1}) \quad (\text{벡터의 중점})$$

좌변 \vec{AP} 와 좌변 $\vec{B_1C_1}$ 가 만나는 점 중점 H가 된다.

$\vec{AP} = 2 \cdot \vec{PH}$ 이므로 점 P는 선분 AH를 2:1로 내분하는 점이다.

$$\text{삼각형 } PA_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot \Delta A_1B_1H = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \Delta A_1B_1C_1 = \frac{1}{3} \cdot 625$$

$$\therefore \frac{625}{3}$$

문제	등급	평가
문제1	A	1번 문항은 위치벡터의 개념을 이용하여 주어진 문제를 해결하였음. 2번 문항은 n에 따른 삼각형의 넓이의 관계를 유도하여 주어진 문제를 해결하였음. 3번 문항은 무게중심의 식을 유도하고 그 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결하였음.

[문제 2]

문제 1) 제시문이 의하여 $\frac{d}{dx} H(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 이므로 증감표를 그려보면.

x	...	1	...	5	...
$\frac{d}{dx} H(x)$	-	0	+	0	-
모형	↘	극소	↗	극대	↘

x=1 일때 극소값을 가지고
x=5 일때 극대값을 가진다.
따라서 b=5이다.

$H(1) = 0$ 이므로 제시문에서 하미 함수 f(x)의 부정적분을 F(x)라 하면.

$H(x) = F(g(x)) - F(a)$ 이다

$H(1) = F(g(1)) - F(a) = 0$

$F(2) - F(a) = 0$ 이므로 a=2이다.

문제 2) $A(x) = \int_0^x |e^t - x| dt$ 인데 x값에 따라 정답값 안의 부호가 변하므로 범위를 나눠서

1) $x < 1$ 일때 $A(x) = \int_0^x (e^t - x) dt = [e^t - xt]_0^x = e^x - x^2 - 1$

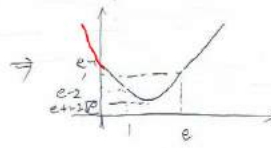
2) $1 \leq x < e$ 일때 $A(x) = \int_0^1 (e^t - x) dt + \int_1^x (x - e^t) dt = [e^t - xt]_0^1 + [xt - e^t]_1^x = e - x + x^2 - x + 1 = x^2 - 2x + e + 1$

3) $e \leq x$ 일때 $A(x) = \int_0^1 (e^t - x) dt + \int_1^e (x - e^t) dt + \int_e^x (x - e^t) dt = [e^t - xt]_0^1 + [xt - e^t]_1^e + [xt - e^t]_e^x = e - x + ex - e + 1 - e + 1 + ex - e^x = 2ex - x^2 - x + 2$

$\therefore A(x) = \begin{cases} x^2 - x^2 - 1 & (x < 1) \\ x^2 - 2x + e + 1 & (1 \leq x < e) \\ 2ex - x^2 - x + 2 & (e \leq x) \end{cases}$

$A'(x) = \begin{cases} -2x & (x < 1) \\ 2x - 2 & (1 \leq x < e) \\ 2e - 2x - 1 & (e \leq x) \end{cases}$ 즉 증감표를 그려보면

x	1	...	e	...	e
A'(x)	-	0	+	0	-
A(x)	e	...	e+2/e	...	1



이므로 $A(x)$ 는 $x=1$ 에서
 $e+2/e$ 이다

문제 3)

x-t를 m으로 치환하면 $m = x-t \Rightarrow t = x-m$
 $dm = -dt$

$\therefore F(x) = \int_0^x \frac{e^{x-t}}{f(x-t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{x-m}}{f(m)} (-dm) = \int_0^x \frac{e^{x-m}}{f(m)} dm = e^x \int_0^x \frac{1}{f(m)e^m} dm$

$F(1) = e^2 \int_0^1 \frac{1}{f(m)e^m} dm = -2$

$F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{f(m)e^m} dm + e^{2x} \times \frac{1}{f(x)e^x}$

$= 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{f(m)e^m} dm + \frac{e^x}{f(x)}$

$F'(1) = 2e^2 \int_0^1 \frac{1}{f(m)e^m} dm + \frac{e}{f(1)}$

$= 2 \times (-2) + \frac{e}{f(1)}$

$= -4 + \frac{e}{f(1)} = 0 \therefore f(1) = \frac{e}{4}$

(2/2) 이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지와 다릅니다.

문제	등급	평가
문제2	A	모든 문제의 풀이에 있어서 논리적인 답안임.

[문제 2]

1. 미분가능한 함수 $g(x) : (0, 6) \rightarrow [0, 5]$ 에 대하여 함수 $H(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$ 는 구간 $(0, 6)$ 에서
 단항변수로 $\frac{d}{dx} H(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 라 할 수 있다.
 $\frac{d}{dx} H(x) = 0$ 이면 $f(g(x)) = 0$ 이거나 $g'(x) = 0$ 이므로 $x=1$ 또는 $x=5$.
 $\frac{d}{dx} H(x) = f(g(x)) \cdot \{g'(x)\}^2 + f(g(x))g''(x)$
 $\frac{d}{dx} H(x) = f(g(x)) \cdot \{g'(x)\}^2 + f(g(x))g''(x) = f(x)g''(x)$ ($\because g'(x)=0, f(g(x))=f(x)>0, g''(x)$ 은 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 $x=5$ 까지 x 의 변화에 따라 변하므로.
 $g''(x) > 0$ 이다. $\therefore \frac{d}{dx} H(x) > 0$ 이므로 함수 $H(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소값을 갖는다.
 $\frac{d}{dx} H(x) = f(g(x)) \cdot \{g'(x)\}^2 + f(g(x))g''(x) = f(x) \cdot \{g'(x)\}^2$ ($\because f(x)=0$), $f(x)$ 는 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극소이므로
 $f(x) < 0, \{g'(x)\}^2 > 0$ 이므로 $\frac{d}{dx} H(x) < 0$ 이다. 따라서 함수 $H(x)$ 는 $x=5$ 에서 극대값을 갖는다.
 따라서 $x=5$ 가 a 라 할 수 있다.

① $H(x) = \int_a^x f(t) dt = 0$ 이면 $0 \leq x \leq 6$ 이면 $f(x) > 0$ 이므로 $0=2$ 이다. $a=2, b=5$.

2. $e^t - x = u$ 라 하자 $e^t = \frac{du}{dt}$ 이면 $e^t = \frac{1}{\ln u}$ 이다. $t=0$ 이면 $u=1-x$, $t=1$ 이면 $u=e-x$.

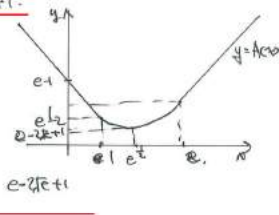
$$A(x) = \int_0^1 |e^t - x| e^{-t} dt = \int_{1-x}^{e-x} \frac{1}{e^t - x} dt = \int_{1-x}^{e-x} \frac{|u|}{x+u} du$$

첫째, $x \geq e$ 이면 $\int_{1-x}^{e-x} \frac{-u+x}{x+u} du = [-u + x \ln(x+u)]_{1-x}^{e-x} = x+1-e$.

둘째, $1 < x < e$ 이면 $\int_{1-x}^{e-x} \frac{u+x-x}{x+u} du + \int_{e-x}^0 \frac{-u+x}{x+u} du = [u - x \ln(u+x)]_0^{e-x} + [-u + x \ln(u+x)]_{1-x}^0$
 $= 2x \ln x - 3x + e + 1$ (여기서 $1 \leq x < e$)

$h(x) = 2x \ln x - 3x + e + 1$ 라 하자
 $h'(x) = 2 \ln x - 1, h'(e^{1/2}) = 0$
 $h''(x) = \frac{2}{x}, h''(e^{1/2}) > 0$

x	1	\sqrt{e}	e
$h(x)$	-2	0	1
$h'(x)$	-1	0	1



셋째, $x < 1$
 $\int_{1-x}^{e-x} \frac{u+x-x}{x+u} du = [u - x \ln(x+u)]_{1-x}^{e-x} = -x + e - 1$.

3. $x-t = u$ 라 하자 $-1 = \frac{du}{dt}, dt=0$ 이면 $u=x, dt=1$ 이면 $u=0$.

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{2x-u}}{f(u)} du = e^{2x} \int_0^x \frac{e^{-u}}{f(u)} du \Rightarrow F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{e^{-u}}{f(u)} du + e^{2x} \frac{e^{-x}}{f(x)}$$

$$\hookrightarrow F'(x) = -2 = \int_0^1 \frac{e^{-u}}{f(u)} du \quad F'(x) = 2 \int_0^1 \frac{e^{-u}}{f(u)} du + \frac{e^{-x}}{f(x)} = -4 + \frac{e}{f(x)} = 0$$

$\therefore f(x) = \frac{e}{4}$

(2/2)

이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지와 다릅니다.

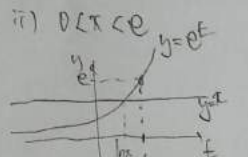
문제	등급	평가
문제2	A	문제1은 문제에서 주어진 조건을 모두 사용하여 논리적으로 문제를 해결하였음. 문제2는 적분으로 표현된 함수의 그래프를 그리기 위해 그래프를 파악할 수 있는 조건을 모두 사용하여 논리적으로 문제를 해결하였음. 문제3은 치환적분을 정확히 사용하여 문제를 해결하였음.

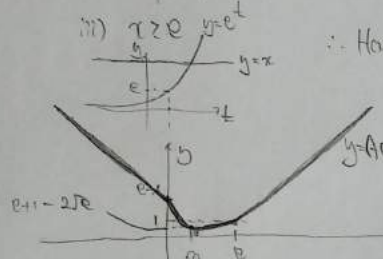
제 2]

[문제 1] $H(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ 이고, $x=5$ 에서 $f(g(x)) = f(1) = 0$ 이다.
 $x=5$ 를 지날 때 $g(x)$ 는 4에서 4로 변한다.
 $\therefore f(g(x))g'(x)$ 는 양에서 음으로 변하므로 $x=5$ 에서 $H(x)$ 는 극댓값을 가진다.
 $\therefore b=5$

또한 $x=1$ 일 때 $g(x)$ 는 최솟값이므로 $g'(1) = 0$ 이다.
 $x=1$ 에서 $H(x)$ 는 음에서 양으로 변하므로 $H(x)$ 는 1에서 극솟값을 가진다.
 $\therefore H(1) = \int_0^2 f(t)dt = 0$ 이므로 $a=2$.

[문제 2] i) $x < 0$. $e^x - x > 0$
 $\therefore H(x) = \int_0^x e^t - x dt = [e^t - xt]_0^x = -x + e^{-x}$

ii) $0 < x < e$ $y = e^x$

 $\therefore H(x) = \int_0^{hx} x \cdot e^t dt + \int_{hx}^x e^t - x dt$
 $= [xt \cdot e^t]_0^{hx} + [e^t - xt]_{hx}^x = 2x \ln x - 2x + e^x$

iii) $x \geq e$ $y = x$

 $\therefore H(x) = \int_0^x x \cdot e^t dt = x \cdot e^x + 1$
 Γ $0 < x < e$, $H(x) = 2x \ln x - 2x + e^x$
 $H'(x) = 2 \ln x + 2 - 2$
 $\therefore x = \sqrt{e}$ 에서 극댓값 $-2\sqrt{e} + e + 1$
 $H''(x) = \frac{2}{x} \geq 0$ (이차함수 4점)

[문제 3] 주어진 문제에서 $F(x) = -2$, $F'(x) = 0$ 일 때 알 수 있다.
 $x \pm k$ 라 하면, $F(x) = \int_0^x \frac{e^{2k}}{f(k)} dk = e^{2x} \int_0^x \frac{1}{f(k)} dk$
 $F'(x) = 2e^{2x} \int_0^x \frac{1}{e^{2k} f(k)} dk + \frac{e^{2x}}{f(x)}$, $F'(x) = 2e^x \int_0^x \frac{1}{e^k f(k)} dk + \frac{e}{f(x)}$
 $F(x) = e^x \int_0^x \frac{1}{e^k f(k)} dk = -2$ $\therefore \int_0^x \frac{1}{e^k f(k)} dk = -\frac{2}{e^x}$
 $\therefore F(x) = -4 + \frac{e}{f(x)} = 0$ $\therefore f(x) = \frac{e}{4}$

(2/2)
 이 답안지는 모의 논술 답안지입니다. 실제 논술 답안지와 다릅니다.

문제	등급	평가
문제2	A	문제1은 주어진 조건을 이용하여 논리적으로 해결하였음. 문제2는 그래프의 개형을 그리기 위한 조건을 정확히 사용하여 문제를 해결하였음. 문제3은 치환적분을 이용하여 문제를 정확히 해결하였음.