단국대학교 2017학년도전형 모의논술고사

자연계열

문제 및 가이드답안

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

<제시문>

(가) 평면에서 한 점 O를 고정하면 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$인 점 P의 위치가 하나로 정해진다. 역으로 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$가 하나로 정해진다. 이와 같이 좌표평면에서 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 점 P에 대한 위치벡터라고 한다.
(나) 좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여 선분 AB를 $m:n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점을 Q라 하면, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$이다.

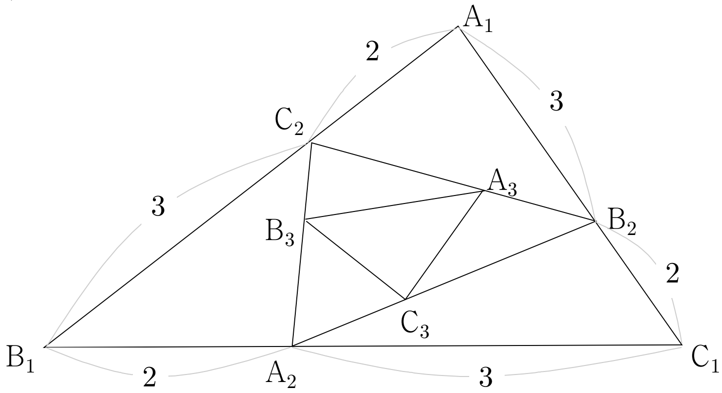
자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n, B_n, C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

① 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ 의 넓이는 625이다.

② $\overrightarrow{\mathrm{OA}_{n+1}} = \dfrac{1}{5}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}_n} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}_n})$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}_{n+1}} = \dfrac{1}{5}(3\overrightarrow{\mathrm{OC}_n} + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}_n})$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}} = \dfrac{1}{5}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}_n} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}_n})$



[논제 1] $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} + \overrightarrow{\mathrm{B_1B_2}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}$을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하시오. (10점)

[논제 2] 삼각형 $\mathrm{A_3B_3C_3}$의 넓이를 구하시오. (10점)

[논제 3] 다음 조건을 만족시키는 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{PA_1B_1}$의 넓이를 구하시오. (20점)

$n \to \infty$일 때, 선분의 길이 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{P}}$가 모두 0으로 수렴한다.

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (60점)

<제시문>

(가) 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면,

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \quad (a \le x \le b)$$

가 성립한다. 따라서 $a \le g(x) \le b$인 함수 $g(x)$에 대하여

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = F(g(x)) - F(a)$$

이다. 그러므로 미분가능한 함수 $g : (c, d) \to [a, b]$에 대하여 함수 $H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$는 구간 (c, d)에서 미분가능하고,

$$\frac{d}{dx}H(x) = f(g(x))\,g'(x)$$

이다.

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x = c$에서 극값을 가지면 $f'(c) = 0$이다.
이 때 x가 증가하면서 $x = c$를 지날 때 $f'(x)$의 부호가

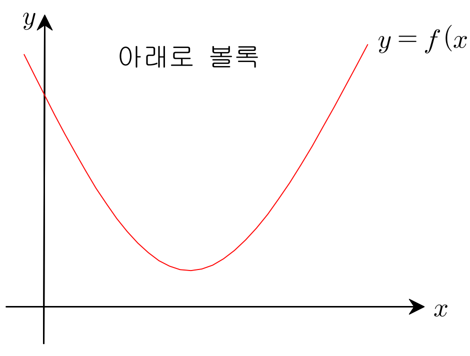
- 양에서 음으로 변하면 $f(x)$는 $x = c$에서 극댓값을 가진다.
- 음에서 양으로 변하면 $f(x)$는 $x = c$에서 극솟값을 가진다.

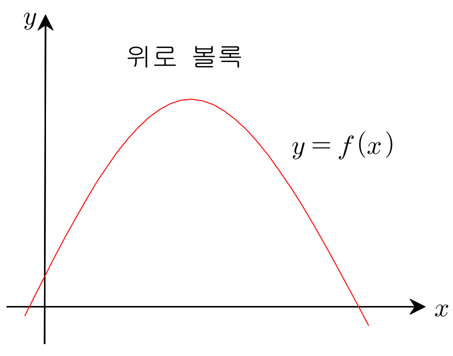
또한 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(c) = 0$일 때

- $f''(c) < 0$이면 $f(x)$는 $x = c$에서 극댓값을 가진다.
- $f''(c) > 0$이면 $f(x)$는 $x = c$에서 극솟값을 가진다.

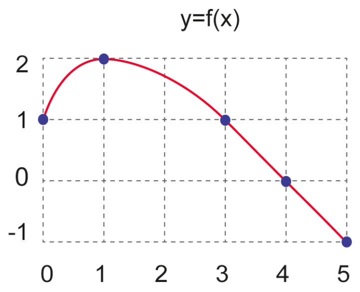
(다) 함수 $f(x)$의 정의역과 치역, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, x절편과 y절편, 연속성 등을 알면 그 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에 대하여

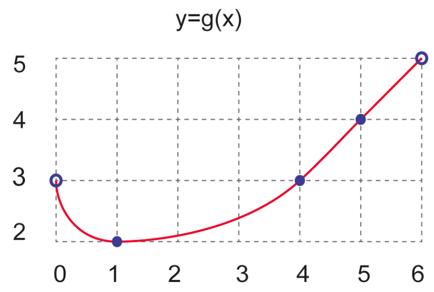
- 구간 (a, b)에서 항상 $f''(x) > 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 (a, b)에서 아래로 볼록하다.
- 구간 (a, b)에서 항상 $f''(x) < 0$이면 곡선 $y = f(x)$는 (a, b)에서 위로 볼록하다.





[논제 1] 아래 그림은 정의역이 구간 $[0,5]$이고 치역이 구간 $[-1,2]$인 연속함수 $f(x)$와 정의역이 구간 $(0,6)$이고 치역이 구간 $[2,5)$인 미분가능한 함수 $g(x)$의 그래프이다.





함수 $H(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)\,dt$가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a와 b의 값을 구하시오. (단, $0 \le a \le 5$) (20점)

① $H(x)$의 극솟값은 0이다. ② $H(x)$는 $x=b$에서 극댓값을 갖는다.

[논제 2] 모든 실수 x에 대하여

$$A(x) = \int_{0}^{1} |e^t - x|\,dt$$

라 할 때 함수 $A(x)$의 최솟값을 구하고, $y=A(x)$의 그래프를 그리시오. (20점)

[논제 3] 구간 $[0,2]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{e^{x+t}}{f(x-t)}\,dt \quad (0 \le x \le 2)$$

라 하자. 함수 $F(x)$가 $x=1$에서 극값 -2를 가질 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, $[0,2]$에서 $f(x) \neq 0$이다.) (20점)