단국대학교 2017학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안 (오후)

전형유형	논술우수자
수험번호	
성　　명	

문제 1

☐ 출제의도

[논제 1] 좌표공간에서 두 개의 구가 만나서 생기는 원의 중심을 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 좌표공간에서 직선의 방정식을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는지를 평가

[논제 3] 좌표공간에서 구와 평면의 관계를 이해할 수 있는지를 평가

☐ 자료출처

○ 김창동 외(2015), 기하와 벡터, 145-149쪽, 154-156쪽, 176-195쪽
○ 신항균 외(2015), 기하와 벡터, 150-160쪽, 164-197쪽
○ 이준열 외(2015), 기하와 벡터, 166-180쪽, 199-212쪽

[논제 1 평가기준]
- 원 C를 포함하는 평면의 방정식을 제시 : 3점
- 점 A와 점 B를 지나는 직선의 방정식을 제시 : 3점
- 원 C의 중심의 좌표 $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$을 제시 : 4점

[논제 2 평가기준]
- 원 C 위의 모든 점으로부터 거리가 일정한 점은 A와 B를 지나는 직선 위에 있음을 제시 : 5점
- 점 P의 좌표를 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]
- (A와 α 사이의 거리)와 (B와 α 사이의 거리)의 관계를 제시 : 7점
- A_1과 A_2를 제시 : 8점
- A와 α 사이의 거리가 1임을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] S_1과 S_2의 방정식은 다음과 같다.

$$S_1 : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4 \quad \cdots ①$$

$$S_2 : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{5}{2} \quad \cdots ②$$

①-②로부터 원 C를 포함하는 평면의 방정식은

$$x - y + z + \frac{1}{4} = 0$$

이고, 원 C의 중심은 이 평면과 A와 B를 지나는 직선의 교점이다. A와 B를 지나는 직선의 방정식은

$$(x,y,z) = (0,1,0) + t(1,-1,1)$$

이므로 두 방정식을 연립하면 $t = \frac{1}{4}$일 때, 원 C의 중심의 좌표 $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$을 얻는다.

[논제 2] 원 C 위의 모든 점과 거리가 일정한 점 (x, y, z)는 A와 B를 지나는 직선 l 위에 있다. 따라서 직선 l의 방정식은

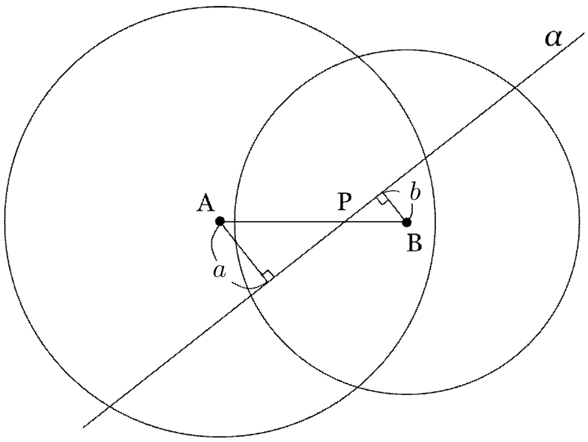
$$(x, y, z) = (0, 1, 0) + t(1, -1, 1)$$

이고, 원점과 직선 l 위의 점 $(x,\ y,\ z)$사이의 거리는

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3t^2 - 2t + 1}$$

이다. 그러므로 $t = \frac{1}{3}$일 때, 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$을 얻는다.

[논제 3]



$\overline{\mathrm{AP}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} < 2$이고 $\overline{\mathrm{BP}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{10}}{2}$이므로, P는 S_1과 S_2의 내부에 있는 점이다. A와 α 사이의 거리를 a, B와 α 사이의 거리를 b라고 하면,

$$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = a : b$$

이므로 $a = 2b$이다. 한편, $\mathrm{A}_1 = \pi(4 - a^2)$이고 $\mathrm{A}_2 = \pi\left(\frac{5}{2} - b^2\right)$이므로, $3A_1 = 4A_2$로부터 $a = 1$이다.

문제 2

□ 출제의도

[논제 1] 연속함수의 개념을 이해하는지를 평가

[논제 2] 부분적분법과 치환적분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 함수의 극대, 극소를 이해하여 함수의 최대, 최소를 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 신항균 외(2015), 미적분 II, 56-78쪽, 108-137쪽, 152-180쪽
○ 정상권 외(2015), 미적분 II, 59-70쪽, 109-142쪽, 162-193쪽
○ 신항균 외(2015), 미적분 I, 67-79쪽
○ 류희찬 외(2016), 미적분 I, 74-87쪽

[논제 1 평가기준]

- $g(x)$를 이해하여 $x=-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$에서만 연속성을 파악하면 된다는 사실을 제시 : 5점
- $h(x)$는 $x=-1,0$에서 연속임을 제시 : 5점
- $h(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$에서만 불연속임을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 부분적분법에 의하여 $\int_0^1 f(x)dx = f(1)-\int_0^1 \frac{x}{1+e^{x^2}}dx$ 임을 제시 : 10점
- 치환적분법을 이용하여 $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{x^2}}dx$ 의 값을 제시 : 7점
- $f(1)$의 값을 제시 : 3점

[논제 3 평가기준]

- $f'(x)$를 제시 : 5점
- $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$이고 $x=0,1$에서 미분가능하지 않음을 제시 : 3점
- $f(x)$가 $x=0$에서 극대, $x=\frac{2}{3}$에서 극소임을 제시 : 7점
- 함수 $M(x)$, $m(x)$를 제시 : 5점
- a의 값을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 함수 $g(x)$는 $x=-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$에서 불연속이고, 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 제시문 (가)에서 제시한 성질에 의해서 함수 $h(x)=f(x)g(x)$는 $x=-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$가 아닌 점에서 연속이다. 따라서 함수 $h(x)$의 연속성은 $x=-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}$에서만 확인하면 된다. 한편,

$$\lim_{x\to-1} h(x)=0=h(-1),\quad \lim_{x\to 0} h(x)=0=h(0)$$

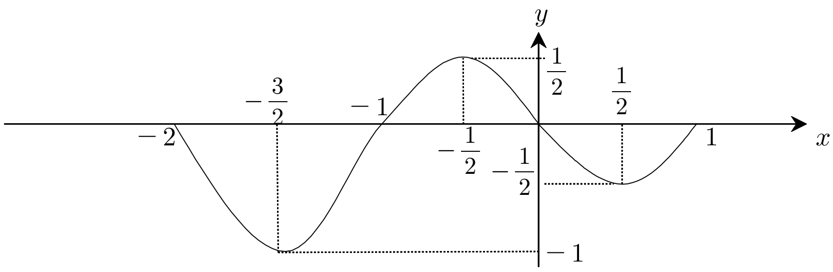
이므로 $h(x)$는 $x=-1,\ 0$에서 연속이다. 또한,

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-} h(x)=1,\quad \lim_{x\to-\frac{1}{2}+} h(x)=2$$

이고

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-} h(x)=-1,\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}+} h(x)=0$$

이므로 $h(x)$는 $x=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$에서 불연속이다.



$f(x)$의 그래프

[논제 2] 부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 f(x)\,dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 x f'(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+e^{x^2}}\,dx$$

이고, 치환적분법에 의하여

$$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,dt \quad (x^2=t\text{로 치환})$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{s(s+1)}\,ds \quad (e^t=s\text{로 치환})$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e \left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\frac{s}{s+1}\right]_1^e = \ln\sqrt{\frac{2e}{e+1}}$$

이다. 따라서

$$0=\int_0^1 f(x)\,dx = f(1)-\ln\sqrt{\frac{2e}{e+1}}$$

로부터

$$f(1)=\ln\sqrt{\frac{2e}{e+1}}$$

이다.

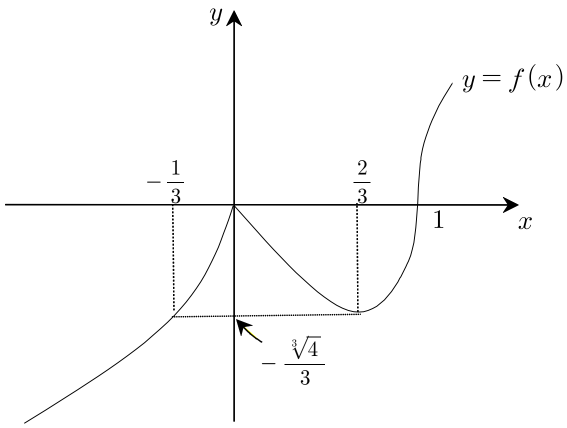
[논제 3] 구간 $[-1,2]$에서 함수 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ 의 그래프를 파악하기 위해서 함수 $f(x)$를 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{3x^2-2x}{(x^3-x^2)^{2/3}}=\frac{x(3x-2)}{3(x-1)^{2/3}x^{4/3}}$$

이다. 따라서 $x=\frac{2}{3}$에서 $f'(x)=0$ 이고 $x=0,1$에서 미분가능하지 않다. 그러므로 도함수 $f'(x)$의 부호를 통해 극대, 극소를 판정하면 아래와 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

이를 이용하여 $f(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



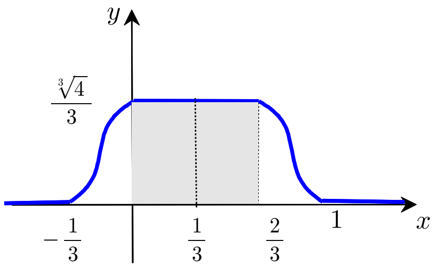
그러므로

$$M(t)=\begin{cases} f(t) & -1\le t<0 \\ 0 & 0\le t<1 \\ f(t) & 1\le t\le 2\end{cases} \text{ 이고 } \quad m(t)=\begin{cases} f(t) & -1\le t<-\frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt[3]{4}}{3} & -\frac{1}{3}\le t<\frac{2}{3} \\ f(t) & \frac{2}{3}\le t\le 2\end{cases}$$

이다. 따라서

$$M(t)-m(t)=\begin{cases} 0 & -1\le t<-\frac{1}{3} \\ f(t)+\frac{\sqrt[3]{4}}{3} & -\frac{1}{3}\le t<0 \\ \frac{\sqrt[3]{4}}{3} & 0\le t<\frac{2}{3} \\ -f(t) & \frac{2}{3}\le t<1 \\ 0 & 1\le t\le 2\end{cases}$$

이고 함수 $y=M(x)-m(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$M(x)-m(x)$의 그래프

정적분 $\int_{a-\frac{1}{3}}^{a+\frac{1}{3}}(M(t)-m(t))\,dt$는 곡선 $y=M(x)-m(x)$와 두 직선 $x=a-\frac{1}{3}$, $x=a+\frac{1}{3}$ 및 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이이므로, $\int_{a-\frac{1}{3}}^{a+\frac{1}{3}}(M(t)-m(t))\,dt$의 값이 최대가 되도록 하는 a의 값은 $\frac{1}{3}$이다.