단국대학교 2017학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안 (오전)

전형유형	논술우수자
수험번호	
성　　명	

문제 1

□ 출제의도

[논제 1] 순간변화율의 개념을 이해하여 실생활 문제에 응용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분과 적분의 관계를 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 3] 정적분과 부분적분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2015), 미적분 Ⅰ, 132-143쪽, 165-168쪽
○ 김원경 외(2015), 미적분 Ⅰ, 116-125쪽, 145-156쪽
○ 김창동 외(2015), 미적분 Ⅰ, 158-160쪽, 162-164쪽
○ 황선욱 외(2015), 미적분 Ⅱ, 145-146쪽, 148-152쪽
○ 이준열 외(2015), 미적분 Ⅱ, 37-40쪽, 183-185쪽
○ 류희찬 외(2015), 미적분 Ⅱ, 118-122쪽, 170-179쪽

[논제 1 평가기준]
- $\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+x}\right)\frac{dx}{dt}$를 제시 : 5점
- $\frac{dx}{dt}=4\sqrt{3}$을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- $f'(x)=x+1-2xe^{-x}$를 제시 : 5점
- $f(1)=\frac{4}{e}$를 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]
- 접선의 방정식 $y=\frac{1}{x_k}x+\ln x_k-1$을 제시 : 3점
- $S_k=\frac{1}{2}x_k(\ln x_k)^2$을 제시 : 2점
- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{n+k}=\frac{1}{2}\int_1^2(\ln x)^2dx$를 제시 : 5점
- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{n+k}=(\ln 2)^2-2\ln 2+1$을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1] $V=\sqrt{x^2+x}$ 의 양변을 t에 대해 미분하면

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{x^2+x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+x}\right)\frac{dx}{dt}=\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}\right)\frac{dx}{dt}$$

이다. 물을 매초 $7\mathrm{cm}^3$씩 넣으므로 $\frac{dV}{dt}=7$이고, $x=3$일 때, $\frac{dx}{dt}=4\sqrt{3}$이다.

따라서 구하는 수면의 높이의 변화율은 $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}/$초이다.

[논제 2] 주어진 식의 양변을 x에 대해 미분하면,

$$e^x f(x)+(x+1)e^x = e^x f(x)+e^x f'(x)+2x$$

이므로

$$f'(x)=x+1-2xe^{-x}$$

이다. 양변을 x에 대해 적분하면,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2\int xe^{-x}dx$$

이고, 부분적분법에 의해

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2xe^{-x}+2e^{-x}+C$$

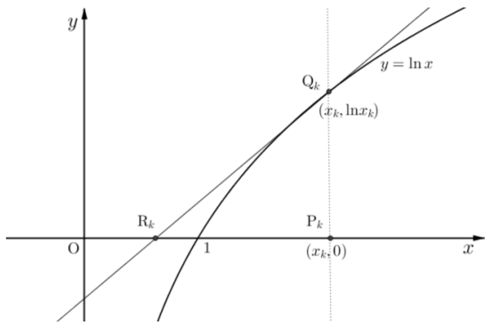
이다. 한편, $f(0)=\frac{1}{2}$에서 $C=-\frac{3}{2}$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2xe^{-x}+2e^{-x}-\frac{3}{2}$이고, $f(1)=\frac{4}{e}$이다.

[논제 3] 점 Q_k에서 곡선 $y=\ln x$에 접하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{x_k}x+\ln x_k-1$$

이다. R_k의 좌표는 $(x_k-x_k\ln x_k,\ 0)$이므로 S_k는 다음과 같다.

$$S_k=\frac{1}{2}x_k(\ln x_k)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n+k}{n}\right)\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^2$$



따라서 정적분의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^2\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_1^2(\ln x)^2dx$$

이다. 부분적분법에 의해

$$\frac{1}{2}\int_1^2(\ln x)^2dx=\frac{1}{2}\left[x(\ln x)^2\right]_1^2-\int_1^2\ln x\,dx$$
$$=(\ln 2)^2-[x\ln x-x]_1^2$$
$$=(\ln 2)^2-2\ln 2+1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{n+k}=(\ln 2)^2-2\ln 2+1$이다.

문제 2

□ 출제의도

[논제 1] 공간벡터의 개념을 이해하고 공간벡터의 크기를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 공간좌표를 이해하고 직선의 방정식을 구할 수 있는지를 평가

[논제 3] 공간벡터의 덧셈을 이해하여 이와 관련된 확률을 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 류희찬 외(2015), 기하와 벡터, 170-182쪽
○ 정상권 외(2015), 기하와 벡터, 172-188쪽
○ 황선욱 외(2015), 확률과 통계, 62-67쪽

[논제 1 평가기준]
- $|\overrightarrow{\mathrm{JK}}| = 2\sqrt{3}$임을 제시 : 5점
- $\mathrm{X}=\mathrm{K}$일 때 최댓값을 갖는다는 사실을 제시 : 5점
- $|\overrightarrow{\mathrm{JK}}+\overrightarrow{\mathrm{LX}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{NX}}|$의 최댓값이 $5\sqrt{3}$임을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점과 선분 EF를 $2:1$로 내분하는 점을 지나는 직선임을 제시 : 5점
  (예시 답안에 나와 있는 6개의 직선 중 하나의 설명만 제시해도 점수를 부여함.)
- $k=6$임을 제시 : 5점
- $m=\sqrt{3}$, $n=\sqrt{3}$임을 제시 : 5점
- $z_1=-\sqrt{3}$임을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]
- 전체 경우의 수가 502임을 제시 : 5점
- 선택된 모서리가 4개일 때부터 9개일 때까지의 경우의 수를 제시
  : 아래와 같은 방법으로 최대 15점까지 부여
  1 ~ 2가지를 제시 : 5점
  3 ~ 4가지를 제시 : 10점
  5 ~ 6가지를 제시 : 15점
- 확률이 $\frac{63}{502}$임을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 구의 중심을 O라 하자.

$|\overrightarrow{\mathrm{OL}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|=\sqrt{3}$ 이므로 구의 반지름은 $\sqrt{3}$ 이고 삼각기둥의 높이는 $|\overrightarrow{\mathrm{JK}}|=2\sqrt{3}$ 이다.

한편,

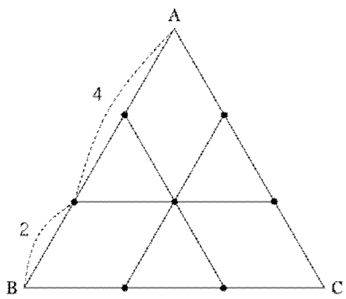
$$\overrightarrow{\mathrm{JK}}+\overrightarrow{\mathrm{LX}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{NX}}=\overrightarrow{\mathrm{JK}}+3\overrightarrow{\mathrm{OX}}-(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}})$$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\vec{0}$ 이므로

$$|\overrightarrow{\mathrm{JK}}+\overrightarrow{\mathrm{LX}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{NX}}|=|\overrightarrow{\mathrm{JK}}+3\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$$

이다. 따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{JK}}+\overrightarrow{\mathrm{LX}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}+\overrightarrow{\mathrm{NX}}|$는 $\mathrm{X}=\mathrm{K}$일 때 최댓값 $5\sqrt{3}$을 갖는다.

[논제 2] 구하려는 직선이 삼각형 ABC의 한 변을 지나는 점을 P라 하고 삼각형 DEF의 한 변을 지나는 점을 Q라 하면 P와 Q는 S의 중심에 대한 점대칭이다. 따라서 Q를 xy평면에 정사영시킨 점을 Q′이라 하면 P와 Q′은 삼각형 ABC의 무게중심에 대한 점대칭이고, 이를 만족시키는 두 점 P와 Q′은 다음과 같이 세 쌍이다.



선분 AB를 1:2로 내분하는 점과 선분 BC를 2:1로 내분하는 점
선분 AB를 2:1로 내분하는 점과 선분 CA를 1:2로 내분하는 점
선분 BC를 1:2로 내분하는 점과 선분 CA를 2:1로 내분하는 점

그러므로 구하려는 직선은 다음과 같이 6개이다.

선분 AB를 1:2로 내분하는 점과 선분 EF를 2:1로 내분하는 점을 지나는 직선
선분 DE를 1:2로 내분하는 점과 선분 BC를 2:1로 내분하는 점을 지나는 직선
선분 AB를 2:1로 내분하는 점과 선분 FD를 1:2로 내분하는 점을 지나는 직선
선분 DE를 2:1로 내분하는 점과 선분 CA를 1:2로 내분하는 점을 지나는 직선
선분 BC를 1:2로 내분하는 점과 선분 FD를 2:1로 내분하는 점을 지나는 직선
선분 EF를 1:2로 내분하는 점과 선분 CA를 2:1로 내분하는 점을 지나는 직선

이들은 모두 구의 중심 $(0,0,-\sqrt{3})$을 지나고 각각 점

$(-1,\sqrt{3},0)$, $(1,-\sqrt{3},0)$, $(-2,0,0)$, $(2,0,0)$, $(-1,-\sqrt{3},0)$, $(1,\sqrt{3},0)$

을 지나는 직선이므로 그 방정식은 각각 다음과 같다.

$$-x=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\quad x=-\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\quad -\frac{x}{2}=\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ y=0,$$

$$\frac{x}{2}=\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ y=0,\quad -x=-\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\quad x=\frac{y}{\sqrt{3}}=\frac{z+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

따라서 $k=6$, $m=\sqrt{3}$, $n=\sqrt{3}$, $z_1=-\sqrt{3}$ 이다.

[논제 3] 전체 경우의 수는 다음과 같다.

$${}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 + {}_9C_5 + {}_9C_6 + {}_9C_7 + {}_9C_8 + {}_9C_9 = 2^9 - 10 = 502$$

사건 T가 일어나는 경우의 수는 다음과 같다.

- 2개를 선택하는 경우: (두 밑면의 변 중 평행인 2개를 선택하는 경우)
  + (세 옆면의 변 중 세로로 평행인 2개를 선택하는 경우)
  = $3+3=6$(가지)
- 3개를 선택하는 경우: (두 밑면의 변 중 평행하지 않은 3개를 선택하는 경우)
  = (한 밑면의 세 변을 선택하는 경우)
  + (밑면 ABC에서 변 1개, 밑면 DEF에서 변 2개를 선택하는 경우)
  + (밑면 ABC에서 변 2개, 밑면 DEF에서 변 1개를 선택하는 경우)
  = $2+3+3=8$(가지)
- 4개를 선택하는 경우: (두 밑면에서 평행한 두 쌍의 변을 선택하는 경우)
  + (세 옆면에서 세로로 평행한 한 쌍의 변을 선택하는 경우)
  ×(두 밑면에서 평행한 한 쌍의 변을 선택하는 경우)
  = $3+3\times3=12$(가지)
- 5개를 선택하는 경우: (두 밑면의 변 중 평행하지 않은 3개를 선택하는 경우)
  ×(세 옆면에서 세로로 평행한 두 쌍의 변을 선택하는 경우)
  = $8\times3=24$(가지)
- 6개를 선택하는 경우: (두 밑면의 여섯 변을 모두 선택하는 경우)
  + (두 밑면에서 평행한 두 쌍의 변을 선택하는 경우)
  ×(세 옆면에서 세로로 평행한 한 쌍의 변을 선택하는 경우)
  = $1+3\times3=10$(가지)
- 7개를 선택하는 경우: 0(가지)
- 8개를 선택하는 경우: (세로로 평행한 1개의 변을 제외하고 나머지를 모두 선택하는 경우)
  = 3(가지)
- 9개를 선택하는 경우: 0(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{63}{502}$이다.