문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 등차수열과 등비수열의 개념을 알고, 로그의 성질을 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 상용로그의 지표와 가수를 이해하고 수열의 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2013), 수학 I, 76-88쪽, 104-120쪽
○ 양승갑 외(2013), 수학 I, 80-93쪽, 112-126쪽
○ 이준열 외(2013), 수학 I, 81-92쪽, 111-128쪽
○ 이동원 외(2013), 수학 I, 86-97쪽, 114-131쪽
○ 우무하 외(2013), 수학 I, 87-98쪽, 120-129쪽

[논제 1 평가기준]
- $a_n = a_1 \times (10^d)^{n-1}$임을 제시 : 5점
- 공비가 10^d임을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 공비 d와 $f(a_{22}) - f(a_2)$의 관계 제시 : 10점
- 최댓값, 최솟값 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제1] $\{\log a_n\}$을 공차가 d인 등차수열이라 하면 일반항은

$$\log a_n = \log a_1 + (n-1)d$$

이다. 따라서

$$\log a_n = \log a_1 + \log 10^{(n-1)d} = \log a_1 10^{(n-1)d}$$

이므로,

$$a_n = a_1 \times (10^d)^{n-1}$$

이다. 그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 10^d인 등비수열이다.

[논제2] $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하면

$$\log a_{22} = f(a_{22}) + g(a_{22}) = \log a_1 + 21d$$
$$\log a_2 = f(a_2) + g(a_2) = \log a_1 + d$$

이므로

$$20d = f(a_{22}) - f(a_2) + g(a_{22}) - g(a_2) = \{f(a_{22}) - f(a_2)\} - \frac{1}{2} = k - \frac{1}{2}$$

(단, $k = f(a_{22}) - f(a_2)$) 이다. 따라서 $-1 < d < 0$의 조건으로부터

$$-1 < \frac{k}{20} - \frac{1}{40} < 0$$

이고, k는 정수이므로 $-19 \le k \le 0$ 이다. 그러므로

$$d = \frac{k}{20} - \frac{1}{40}$$

에서 구하는 최댓값은 $-\frac{1}{40}$, 최솟값은 $-\frac{39}{40}$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ **출제의도**

[논제 1] 일차변환의 기하학적 의미를 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 일차변환의 성질을 활용하여 기하문제를 해결할 수 있는지를 평가

☐ **자료출처**

○ 최용준 외(2013), 기하와 벡터, 10-34쪽
○ 계승혁 외(2013), 기하와 벡터, 10-37쪽
○ 정상권 외(2013), 기하와 벡터, 12-36쪽
○ 황선욱 외(2013), 기하와 벡터, 11-30쪽
○ 김수환 외(2013), 기하와 벡터, 11-31쪽

[논제 1 평가기준]

- $f_1 \circ g$의 기하학적 의미를 제시: 5점
- $f_2 \circ h$의 기하학적 의미를 제시: 5점

[논제 2 평가기준]

- $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_4}$, $\overline{OP_7}$의 길이를 구함: 6점
- O, P_2, P_4가 한 직선위에 있음을 설명: 4점
- $\theta = \frac{\pi}{12}$임을 제시: 7점
- $\triangle P_2P_4P_7 = \frac{5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2^{12}}$임을 제시 : 8점

□ 예시 답안

[논제 1] $f_1 \circ g$는 주어진 점을 y축 위로 수선의 발을 내린 후 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동 시키고, $f_2 \circ h$는 주어진 점을 x축 위로 수선의 발을 내린 후 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}-\theta$만큼 회전이동 시킨다.

[논제 2] [논제 1]로부터 음이 아닌 정수 n에 대하여 P_{4n+1}, P_{4n+2}, P_{4n+3}, P_{4n+4}은 차례대로 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 위치하게 됨을 알 수 있다. 또한 P_{4n+1}과 P_{4n+3}은 원점을 지나고 기울기가 $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$인 직선 위에 놓여 있고, P_{4n+2}와 P_{4n+4}는 원점을 지나고 기울기가 $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$인 직선 위에 놓여 있다. 이러한 기하학적인 고찰로부터

$$\begin{aligned}\overline{OP_{4n+1}} &= \sin\theta \times \overline{OP_{4n}} \\ \overline{OP_{4n+2}} &= \cos\theta \times \overline{OP_{4n+1}} \\ \overline{OP_{4n+3}} &= \sin\theta \times \overline{OP_{4n+2}} \\ \overline{OP_{4n+4}} &= \cos\theta \times \overline{OP_{4n+3}}\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이제 조건으로부터

$$\frac{\triangle OP_2P_7}{\triangle OP_4P_7} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_4}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 4$$

이므로 $\theta = \frac{\pi}{12}$이다.

한편, $\overline{OP_7} = \sin^3\theta\cos^3\theta$이므로

$$\triangle P_2P_4P_7 = 5 \times \triangle OP_4P_7 = \frac{5}{2}\sin^4\theta\ \cos^5\theta\ \sin 2\theta = \frac{5\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2^{12}}$$

이다.

문제 3

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제 의도

[논제 1] 평균변화율과 미분계수의 의미를 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 부분적분법을 활용하여 문제를 해결하고 무한등비급수의 합을 구할 수 있는지를 평가

□ 자료 출처

○ 황선욱 외(2013), 수학 I, 180-187쪽
○ 양승갑 외(2013), 수학 I, 182-190쪽
○ 정상권 외(2013), 수학 II, 112-121쪽
○ 유희찬 외(2013), 수학 II, 112-119쪽
○ 계승혁 외(2013), 적분과 통계, 17-20쪽
○ 최봉대 외(2013), 적분과 통계, 28-31쪽

[논제 1 평가 기준]

- $y=f(x)$의 0 부터 x까지의 평균변화율 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$의 값이 $\sqrt{r+1}$임을 제시: 10점

- $f'(0) = \lim_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = 1$임을 제시: 5점

[논제 2 평가 기준]

- $g(x) = 1 - e^{-x}(\sin x + \cos x) = 1 - \sqrt{2}\, e^{-x} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$임을 제시:5점

- $x_n = n\pi - \dfrac{\pi}{4}$(단, n은 자연수)임을 제시: 5점

- $g'(x) = 2e^{-x}\sin x$임을 제시: 5점

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g'(x_n) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\pi}}{1-\left(-\dfrac{1}{e^{\pi}}\right)} = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}}}{1+e^{\pi}}$임을 제시: 5점

□ 예시 답안

[논제 1] 문제의 조건에서 원의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2+(f(x)-f(0))^2=r^2$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 0 부터 x까지의 평균변화율 $\frac{\triangle y}{\triangle x}$는

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}=\frac{r\sqrt{\frac{r+1}{r+2}}}{\frac{r}{\sqrt{r+2}}}=\sqrt{r+1}$$

이다. 한편, $\triangle x \rightarrow 0$일 때, $r \rightarrow 0$이므로, $x=0$에서의 미분계수 $f'(0)$은 다음과 같다.

$$f'(0)=\lim_{\triangle x\rightarrow 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{r\rightarrow 0}\sqrt{r+1}=1$$

[논제 2] 제시문 (나)의 예와 부분적분법을 사용하여, 주어진 $g(x)$에 관한 우변의 적분을 계산하면

$$g(x)=1-e^{-x}(\sin x+\cos x)=1-\sqrt{2}e^{-x}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

이다. 그러므로 방정식 $g(x)=1$의 모든 양의 해는

$$\pi-\frac{\pi}{4},\ 2\pi-\frac{\pi}{4},\ 3\pi-\frac{\pi}{4},\cdots$$

이다. 즉, $x_n=n\pi-\frac{\pi}{4}$(단, n은 자연수)이다. 한편,

$$g'(x)=2e^{-x}\sin x$$

이므로

$$g'(x_n)=2e^{-n\pi+\frac{\pi}{4}}\sin(n\pi-\frac{\pi}{4})=(-1)^{n+1}\sqrt{2}e^{-n\pi+\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}(-e^{-\pi})^n$$

이다. 그러므로 $\left|-\frac{1}{e^{\pi}}\right|<1$이므로 무한등비급수의 합의 공식으로부터

$$\sum_{n=1}^{\infty}g'(x_n)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\pi}}{1-(-\frac{1}{e^{\pi}})}=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{1+e^{\pi}}$$

이다.