단국대학교 2016학년도전형 모의논술고사

# 자연계열

## 문제 및 가이드답안

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 지수의 성질에 의하여 $2^x=8$을 만족시키는 $x$의 값은 3이지만 $2^x=5$를 만족시키는 $x$의 값은 유리수 범위에 없다. 일반적으로, $a>0,\ a\neq 1$일 때, 임의의 양수 $N$에 대하여

$$a^x=N$$

을 만족시키는 실수 $x$는 오직 하나 존재한다. 이 때, $x$를 $a$를 밑으로 하는 $N$의 로그라 하고, 기호로

$$\log_a N$$

과 같이 나타낸다. 일상생활에서 흔히 사용하는 수는 십진법의 수이므로 로그의 계산에서도 10을 밑으로 하는 로그를 사용하면 편리하다. 이렇게 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 상용로그 $\log_{10}N$은 흔히 밑 $10$을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

(나) 임의의 양수 $x$는 10의 거듭제곱을 이용하여

$$x=A\times 10^n \quad (1\le A<10,\ n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 이 식의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x = n+\log A$$

이며, $1\le A<10$이므로 $0\le \log A<1$이다. 이때 정수 $n$을 $\log x$의 지표, $\log A$를 $\log x$의 가수라고 한다.

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 [논제 1]과 [논제 2]의 물음에 답하시오.

[논제 1] 수열 $\{\log a_n\}$이 등차수열이면 $\{a_n\}$은 등비수열임을 설명하시오. (10점)

[논제 2] 양수 $x$에 대하여 $\log x$의 가수를 $g(x)$라고 하자. 수열 $\{\log a_n\}$은 공차가 $d$(단, $-1<d<0$)인 등차수열이고

$$g(a_{22})-g(a_2)=-\frac{1}{2}$$

일 때, $d$의 최댓값과 최솟값을 구하시오. (20점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (35점)

<제시문>

(가) 좌표평면에서 일차변환은 $2\times2$행렬로 나타내어진다. 예를 들어 일차변환 $f$를 나타내는 행렬을 $A$라고 하면 좌표평면의 점 $P$가 $f$에 의하여 옮겨지는 점은

$$f(P)=AP \cdots (\star)$$

와 같이 나타낸다. 즉, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 식 $(\star)$을

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

와 같이 이해하여 행렬의 곱을 통하여 $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$를 계산할 수 있다.

(나) 좌표평면에서의 기하 문제는 대부분 좌표의 대수적 계산으로 해결할 수 있다. 그러나 경우에 따라서는 문제 상황을 나타내는 그림을 생각하며 문제를 해결하면 대수적 계산이 적은 풀이를 할 수 있다. 예를 들어 일차변환 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$은 주어진 점을 원점에서부터 그 점에 이르는 방향으로 원점과의 거리가 3배만큼 멀리 떨어진 점으로 이동시킨다. 이러한 기하학적인 의미를 이용하면 일차변환 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$은 $(1,2)$를 $(3,6)$으로 이동시킨다는 사실을 직관적으로 알 수 있다.

일차변환 $f_1$, $f_2$, $g$, $h$를 나타내는 행렬을 각각

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

이라 하자. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

$P_1=f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$이라 하고 모든 자연수 $n$에 대하여

$$\begin{cases} P_{2n}=(f_1 \circ g)(P_{2n-1}) \\ P_{2n+1}=(f_2 \circ h)(P_{2n}) \end{cases}$$

이라 할 때, [논제 1]과 [논제 2]의 물음에 답하시오.

[논제 1] 좌표평면에서 일차변환 $f_1 \circ g$와 $f_2 \circ h$가 나타내는 기하학적 의미를 각각 설명하시오.(10점)

[논제 2] 삼각형 $OP_2P_7$의 넓이가 삼각형 $OP_4P_7$의 넓이의 4배일 때, 삼각형 $P_2P_4P_7$의 넓이를 구하시오. (단, $O$는 원점이다.) (25점)

[문제3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (35점)

<제시문>

(가) 함수 $y=f(x)$에서

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$

를 $x$의 값이 $a$에서 $a+\triangle x$까지 변할 때 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라 하며, 이 값은 두 점 $(a, f(a))$와 $(a+\triangle x, f(a+\triangle x))$를 지나는 직선의 기울기이다. 또한 $\triangle x \rightarrow 0$일 때 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\triangle x \rightarrow 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x \rightarrow 0}\frac{f(a+\triangle x)-f(a)}{\triangle x}$$

가 존재하면 이 극한값을 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 또는 순간변화율이라 하고 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

(나) 미분 가능한 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 곱의 미분법 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$으로부터 $f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)$ 이다. 이 등식의 양변을 적분하면

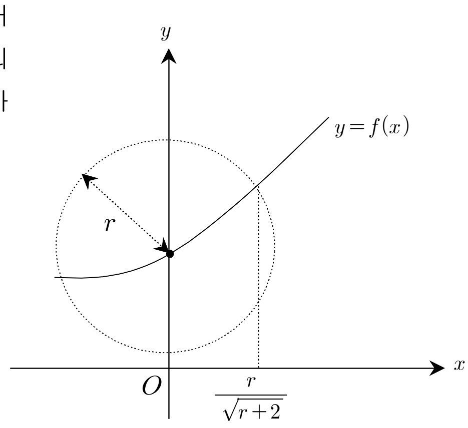
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

를 얻는다. 이와 같은 적분 방법을 부분적분법이라 한다. 예를 들어,

$$\int e^{-t}\sin t\,dt=-e^{-t}\sin t+\int e^{-t}\cos t\,dt$$

이다.

[논제 1] 실수 전체의 집합에서 연속인 증가함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하다. 모든 양수 $r$에 대하여, 중심이 $(0, f(0))$이고 반지름의 길이가 $r$인 원이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 $x$ 좌표 중의 하나가 $\frac{r}{\sqrt{r+2}}$ 이다. 이때, $f'(0)$의 값을 구하시오. (15점)




[논제 2] 함수

$$g(x)=2\int_0^x e^{t-x}\sin(x-t)\,dt$$

에 대하여, 방정식 $g(x)=1$의 모든 양의 해를 작은 것부터 크기 순서대로 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} g'(x_n)$의 값을 구하시오. (20점)