단국대학교 2016학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안(오후)

전형유형	논술우수자
수험번호	
성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

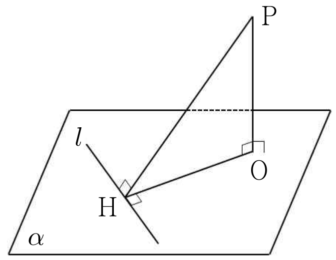
<제시문>

(가) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음이 성립한다.

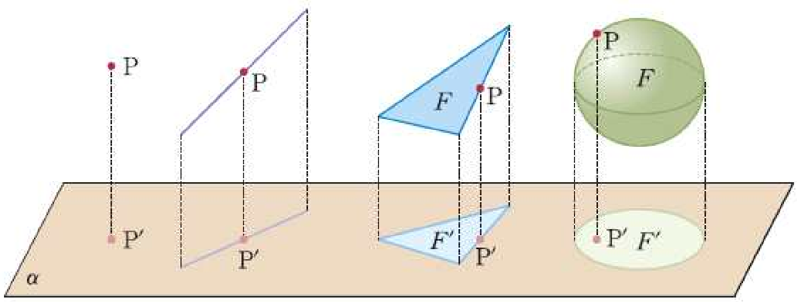
1) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha, \overline{\mathrm{OH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}} \perp l$

2) $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha, \overline{\mathrm{PH}} \perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}} \perp l$

3) $\overline{\mathrm{PH}} \perp l, \overline{\mathrm{OH}} \perp l, \overline{\mathrm{PO}} \perp \overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}} \perp \alpha$



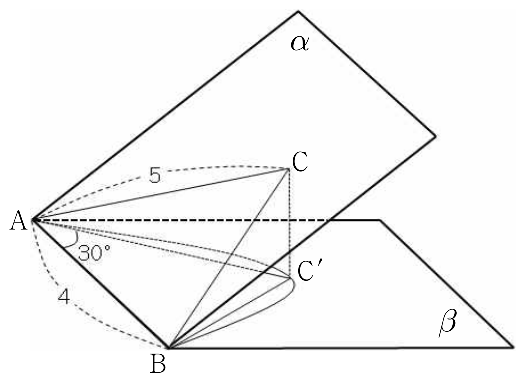
(나) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 P′이라고 할 때, 점 P′을 점 P의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.



(다) 영벡터가 아닌 두 공간벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$가 이루는 각의 크기가 θ일 때

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

[논제 1] 그림과 같이 평면 α 위의 삼각형 ABC의 두 꼭짓점 A, B는 두 평면 α와 β의 교선 위에 있고, 꼭짓점 C의 평면 β 위로의 정사영 C′은 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 있다. $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AC}} = 5$, $\angle \mathrm{C'AB} = 30^\circ$일 때, 두 평면 α와 β가 이루는 각의 크기가 θ이다. $\cos\theta$의 값을 구하시오. (10점)



[논제 2] 두 점 A$(0, 0, 0)$과 B$(1, 1, 1)$을 지나는 직선에 평행하고 점 $(0, 1, 2)$를 지나는 직선 위의 점 C가 있다. 점 C의 x좌표는 -5보다 크고, 삼각형 ABC의 평면 $2x - y + z + 9 = 0$ 위로의 정사영을 삼각형 A′B′C′이라 할 때 사면체 A′B′C′C의 부피가 5이다. 점 C의 좌표를 구하시오. (20점)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 삼수선의 정리를 이해하고 정사영의 뜻을 알며, 이를 활용하여 두 평면이 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 좌표공간에서 평면의 방정식을 구하고, 평면의 법선벡터를 활용하여 두 평면이 이루는 각을 이해하며, 점과 평면사이의 거리를 구할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 최용준 외(2010), 기하와 벡터, 95-103쪽, 175-183쪽
○ 황선욱 외(2010), 기하와 벡터, 85-91쪽, 150-156쪽
○ 황석근 외(2010), 기하와 벡터, 87-96쪽, 159-165쪽
○ 정상권 외(2010), 기하와 벡터, 83-96쪽, 157-162쪽
○ 유희찬 외(2010), 기하와 벡터, 89-100쪽, 166-172쪽

[논제 1 평가기준]

- C'에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 길이 $\overline{HC'} = \sqrt{3}$을 제시 : 5점
- $\cos\theta = \dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \dfrac{|2+2+1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{5}{6}$를 제시 : 5점
- 정사영 $A'B'C'$의 넓이 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta = \dfrac{5}{12}\sqrt{6}$을 제시 : 5점
- 사면체 $A'B'C'C$의 높이 $h = \dfrac{|2t+10|}{\sqrt{6}}$을 제시 : 5점
- 점 $C(13, 14, 15)$를 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제1] 평면 β 위의 점 C'가 반원 위에 있으므로 $\angle AC'B$는 직각이다. $\angle BAC'$는 30°이므로 $\overline{BC'} = 2, \overline{AC'} = 2\sqrt{3}$ 이다. C'에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면,

$$\text{삼각형 } ABC'\text{의 넓이} = 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{HC'}$$

이므로, $\overline{HC'} = \sqrt{3}$이다. $\overline{AC} = 5, \overline{AC'} = 2\sqrt{3}$이므로 $\overline{CC'} = \sqrt{13}$이고, $\overline{HC} = 4$이다.

따라서 $\cos\theta = \dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$이다.

[논제2] 두 점 A와 B를 지나는 직선에 평행하고 점 $(0,1,2)$를 지나는 직선 위의 임의의 점을 $C(t,t+1,t+2)$라고 하자.

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 이라고 하면 $d=0$이므로 $at+b(t+1)+c(t+2)=0$, 즉 $(a+b+c)t+b+2c=0$이다. 그런데 $a+b+c=0$이므로 $b=-2c$, $a=c$이다. 그러므로 세 점을 지나는 평면의 방정식은 $x-2y+z=0$ 이다. 따라서 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ (단, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)라 하면,

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{5}{6}$$

이다.(단, $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$는 각각 두 평면의 법선벡터이다.)

두 점 A,B를 지나는 직선과 점 $(t,t+1,t+2)$를 지나는 직선은 평행하므로, 두 직선 사이의 거리를 구하기 위하여 먼저 두 직선 위의 점 $(0,0,0)$과 점 $(t,t+1,t+2)$ 사이의 거리를 구하면

$$\sqrt{(t-0)^2+(t+1-0)^2+(t+2-0)^2}=\sqrt{3(t+1)^2+2}$$

이다. 따라서 $t=-1$일 때 최솟값을 가지므로 $(0,0,0)$과 $(-1,0,1)$ 사이의 거리를 구하면 $\sqrt{2}$이다.

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{6}}{2}$이며, 정사영 A′B′C′의 넓이는 $\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta=\frac{5}{12}\sqrt{6}$이다.

정사영 A′B′C′을 밑면으로 하는 사면체 A′B′C′C의 높이는

$$h=\frac{|2t-(t+1)+(t+2)+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{|2t+10|}{\sqrt{6}}$$

이다. 문제의 조건에서 사면체의 부피가 5이므로,

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}Ah\\&=\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}\sqrt{6}\times\frac{|2t+10|}{\sqrt{6}}\\&=5\end{aligned}$$

$36=|2t+10|$이므로 $t=13$ 또는 $t=-23$이고, 이 중에 점 C의 x좌표가 -5보다 크다는 조건을 만족시키는 t의 값은 13이다. 그러므로 점 C의 좌표는 $(13,14,15)$이다.

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 함수가 일대일대응이면 역함수를 갖는다. 그러므로 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 역함수를 갖는다. 마찬가지로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$인 경우에도 $f(x)$는 역함수를 갖는다. 예를 들어 $f(x)=1+x-e^{-x}$는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=1+e^{-x}>0$이므로 역함수를 갖는다.
(나) 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라 하면 $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$ 이다.
(다) 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+t$까지 변할 때 $\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$를 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라 하고, 평균변화율의 극한값 $$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$ 가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이때, 이 극한값을 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하고 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)=1+x-e^{-x}$의 역함수를 $g(x)$라 하고 $h(x)=(x^2-2x+2)e^x$일 때, [논제 1]과 [논제 2]의 물음에 답하시오.

[논제 1] $\displaystyle\int_0^{f(1)} e^{g(x)}\,dx$의 값을 구하시오. (10점)

[논제 2] $a\le 0$일 때,

$$K(a)=\lim_{t\to 0}\frac{h(g(a)+g(t))-h(g(a))}{t}$$

라 하자. $K(a)$의 최댓값과 이때의 a의 값을 구하시오. (20점)

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 역함수의 개념을 이해하고 치환적분법과 정적분의 기본정리를 활용할 수 있는지를 평가

[논제 2] 미분계수의 개념을 이해하고 주어진 함수의 최대, 최소를 구할 수 있는지를 평가

□ 자료 출처

○ 이강섭 외(2010), 적분과 통계, 12-28쪽, 38-50쪽
○ 우정호 외(2010), 적분과 통계, 12-37쪽, 54-65쪽
○ 황선욱 외(2010), 수학 II, 114-176쪽
○ 정상권 외(2010), 수학 II, 112-141쪽, 148-153쪽

[논제 1 평가 기준]

- $g(x)=t$로 제시 : 5점
- $\int_0^{f(1)} e^{g(x)}\,dx=\int_0^1 (e^t+1)\,dt=e$를 제시 : 5점

[논제 2 평가 기준]

- $g'(0)=\dfrac{1}{f'(g(0))}=\dfrac{1}{2}$을 제시 : 5점
- $\lim_{t\to 0}\dfrac{h(g(a)+g(t))-h(g(a))}{t}=\dfrac{g(a)^2e^{g(a)}}{2}$를 제시 : 5점
- $a=-1-e^2$일 때, 최댓값 $\dfrac{2}{e^2}$를 제시 : 10점

☐ 예시 답안

[논제 1]

$g(x)=t$로 치환하면 f가 g의 역함수이므로 $x=f(t)$이며 $dx=f'(t)dt=(1+e^{-t})dt$ 이다 한편 $f(0)=0$이므로 $g(0)=0$이고, $g(f(1))=1$이므로,

$$\int_0^{f(1)} e^{g(x)}dx=\int_0^1 e^t(1+e^{-t})dt=\int_0^1 (e^t+1)dt=e$$

이다.

[논제 2]

먼저, $g(0)=0$이고 $f'(x)=1+e^{-x}$ 이므로

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{2}$$

이다. 또, $h'(x)=x^2e^x$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{h(g(a)+g(t))-h(g(a))}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{h(g(a)+g(t))-h(g(a))}{g(t)}\frac{g(t)}{t}\\&=\lim_{s\to 0}\frac{h(g(a)+s)-h(g(a))}{s}\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{t}\\&=h'(g(a))g'(0)\\&=\frac{g(a)^2e^{g(a)}}{2}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $a\le 0$일 때, $K(a)=\frac{1}{2}g(a)^2e^{g(a)}$가 최대가 되는 a의 값을 구한다. $g(x)$가 실수 전체 집합에서 일대일대응인 증가함수이고 $g(0)=0$이므로 $g(a)=x$로 치환하여 $x\le 0$일 때, $H(x)=\frac{1}{2}x^2e^x$의 최댓값을 구하면 된다.

$$H'(x)=\frac{1}{2}x(x+2)e^x$$

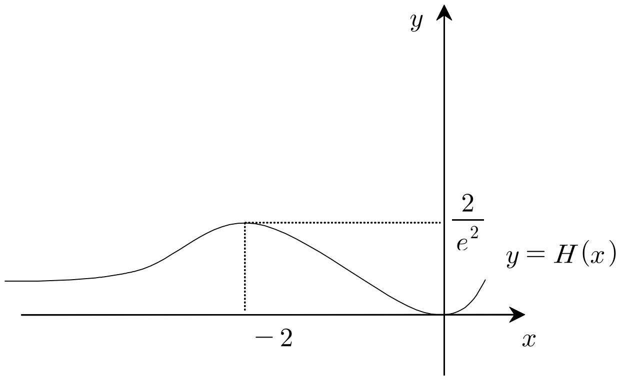
$H'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 이고 $H'(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
H'	$+$	0	$-$	0	$+$
H	$\nearrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

따라서 $x=-2$일 때, 최댓값 $\frac{2}{e^2}$을 갖는다.

한편, $g(a)=x=-2$로부터 $a=f(-2)=-1-e^2$이므로 $a=-1-e^2$일 때, $K(a)$는 최댓값 $\frac{2}{e^2}$를 갖는다.

(참조) 함수 $H(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[문제3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

<제시문>

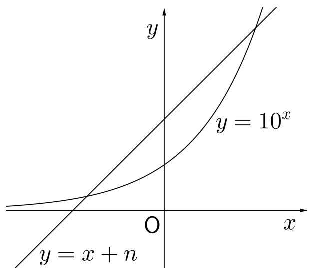
(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $y=f(x-a)+b$가 함수 $y=g(x-a)+b$의 역함수가 되도록 하는 실수 a, b가 존재한다고 하자. 이 경우 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 모두 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

예를 들어 두 함수 $f(x)=x^2+2(x\geq 0)$와 $g(x)=\sqrt{x+1}+3$에 대하여, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 같은 평행이동에 의해 이동한 두 곡선이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이 될 수 있는지 알아보자. 먼저

$$f(x-a)+b=(x-a)^2+b+2\ \ (x\geq a),$$
$$g(x-a)+b=\sqrt{x-a+1}+b+3$$

을 생각하자. 함수 $y=f(x-a)+b$의 역함수를 구하면 $y=\sqrt{x-b-2}+a$이다. 이 때 $b=a-3$이 성립하면 함수 $y=g(x-a)+b$가 함수 $y=f(x-a)+b$의 역함수가 됨을 알 수 있다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 모두 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $a-3$만큼 평행이동한 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(나) 함수 $f(x)=10^x$은 실수 전체의 집합에서 정의된 증가함수이고 연속함수이다. 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하고, n이 2이상의 자연수일 때 직선 $y=x+n$과 두 점에서 만나며 그 교점은 각각 제1사분면과 제2사분면 위에 있다.



[논제 1] 두 곡선 $y=10^{x+1}+2$와 $y=\log(x-1)$을 모두 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 두 곡선이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이라고 하자. 곡선 $y=10^{x+1}+2$를 이동한 곡선이 $y=10^{x+c}$일 때, 세 실수 a, b, c의 값을 구하시오. (10점)

[논제 2] 자연수 n에 대하여 $f(x)=10^{x-n}-n$이라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=1+\log(x+1)$이 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$에서 만날 때 $p(n)=[\alpha]+[\beta]$라 하자. $\sum_{n=1}^{10} p(n)$의 값을 구하시오.(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.) (30점)

문제 3

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 지수함수와 로그함수의 개념을 이해하고 함수와 그 함수의 역함수의 대칭성에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 지수함수와 로그함수의 그래프의 개형을 이용하여 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프의 교점에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2010), 수학 Ⅰ, 64-67쪽, 89-93쪽
○ 황석근 외(2010), 수학 Ⅰ, 66-69쪽, 93-100쪽
○ 이준열 외(2010), 수학 Ⅰ, 75-78쪽, 101-107쪽

[논제 1 평가기준]
- 역함수를 제시 : 5점
- $a=-1$, $b=-2$, $c=2$를 제시 : 5점

※ 제시되는 역함수는 여러 가지가 있을 수 있음. 예를 들어 $y=a-1+\log(x-b-2)$, $y=10^{x-b}+a+1$, $y=-c+\log x$ 등이 있음.

[논제 2 평가기준]
- 서로 역함수가 되는 두 함수를 제시 : 5점
- $10^{p(n)-n+1} \le p(n)+2$, $10^{p(n)-n+2} > p(n)+3$을 제시 : 10점
- $p(n)=\begin{cases} n-1, & 1 \le n \le 7 \\ n, & 8 \le n \le 10 \end{cases}$임을 제시 : 10점
- $\sum_{n=1}^{10} p(n)=48$임을 제시 : 5점

※ 서로 역함수가 되는 두 함수는 여러 가지로 제시될 수 있음. 예를 들어
$y=10^{x-n-1}$과 $y=(n+1)+\log x$,
$y=10^{x-n}+1$과 $y=n+\log(x+1)$,
$b=n+a-1$일 때, $y=10^{x-n-a}-n+b$과 $y=b+1+\log(x-a+1)$
등으로 제시될 수 있음.

□ 예시 답안

[논제 1]

곡선 $y=10^{x+1}+2$와 곡선 $y=\log(x-1)$을 모두 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 두 곡선은 각각 $y=10^{x-a+1}+b+2$와 $y=b+\log(x-a-1)$이다. 함수 $y=10^{x-a+1}+b+2$의 역함

수는 $y=a-1+\log(x-b-2)$이므로, $a-1=b$가 성립할 때 함수 $y=b+\log(x-a-1)$은 함수 $y=10^{x-a+1}+b+2$의 역함수가 된다. 또한 함수 $10^{x-a+1}+b+2=10^{x+c}$이어야 하므로 $b=-2$, $c=-a+1$이다. 따라서 $a=-1$이고, $c=2$이다. 그러므로 $a=-1$, $b=-2$, $c=2$이다.

(별해) 곡선 $y=10^{x+1}+2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 곡선 $y=10^{x-a+1}+b+2$가 $y=10^{x+c}$과 같아야 하므로 $c=-a+1$, $b=-2$이다. 한편 함수 $y=10^{x+c}$의 역함수 $y=-c+\log x$가 $y=b+\log(x-a-1)$과 같아야 하므로 $-c=b$, $a+1=0$이어야 한다. 이로부터 $a=-1$, $c=2$를 얻는다.

[논제 2]
$g(x)=1+\log(x+1)$이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$를 모두 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 두 곡선은 각각 $y=10^{x-n-a}-n+b$와 $y=(b+1)+\log(x-a+1)$이다. $y=10^{x-n-a}-n+b$의 역함수는 $y=(n+a)+\log(x+n-b)$이므로 $b=n+a-1$을 만족시키는 a, b에 대하여 $y=10^{x-n-a}-n+b$와 $y=(b+1)+\log(x-a+1)$은 서로 역함수이다.

특별히 $a=1$, $b=n$이라 하면 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$를 모두 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 두 곡선은 각각 $y=10^{x-n-1}$과 $y=(n+1)+\log x$이다. 이 때 함수 $f_1(x)=10^{x-n-1}$과 함수 $g_1(x)=(n+1)+\log x$는 증가함수이고 서로 역함수이다. 따라서 방정식 $f_1(x)=g_1(x)$의 해는 $10^{x-n-1}=x$의 해와 같다. 한편 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 방정식 $10^{x-n-1}=x$의 해에서 1을 뺀 값이므로 $10^{x-n-1}=x$의 해는 $\alpha_1=\alpha+1$, $\beta_1=\beta+1$이다.
편의상 $\alpha<\beta$라고 가정하면, 지수함수의 그래프의 개형에 의하여 $10^{x-n-1}=x$의 해 α_1, β_1은 $0<\alpha_1<1$, $\beta_1>2$를 만족시킨다.

$\alpha=\alpha_1-1$이므로 $-1<\alpha<0$이 되어 $[\alpha]=-1$이다. 이를 $p(n)=[\alpha]+[\beta]$에 대입하면 $[\beta]=p(n)+1$을 얻는다. $\beta_1=\beta+1$로부터 $[\beta_1]=p(n)+2$이므로 $p(n)+2\le\beta_1<p(n)+3$이 성립해야 한다.
이제 $10^{x-n-1}=x$의 해 β_1이 구간 $[p(n)+2, p(n)+3)$에 존재하기 위해서는 지수함수의 그래프의 개형에 의하여

$$10^{p(n)+2-n-1}\le p(n)+2,\ 10^{p(n)+3-n-1}>p(n)+3,\ \text{즉}$$
$$10^{p(n)-n+1}\le p(n)+2,\ 10^{p(n)-n+2}>p(n)+3\ \cdots\ (\star)$$

이 성립해야 한다. 한편 $\beta_1>2$이므로 $[\beta_1]\ge 2$이고, 이를 $[\beta_1]=p(n)+2$에 대입하면 $p(n)\ge 0$을 얻는다. 이제 두 부등식 ($\star$)로부터 다음 관계를 얻을 수 있다.

(ⅰ) $3\le p(n)+3\le 9$인 경우, $p(n)-n+2=1$이어야 하므로 $p(n)=n-1$이고, 이때 $1\le n\le 7$이다.
(ⅱ) $p(n)+3=10$을 만족시키는 n은 존재하지 않는다.
(ⅲ) $11\le p(n)+3\le 99$인 경우, $p(n)-n+2=2$이어야 하므로 $p(n)=n$이고, 이때 $8\le n\le 96$이다.
따라서,

$$p(n)=\begin{cases} n-1, & 1\le n\le 7 \\ n, & 8\le n\le 10 \end{cases}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{10}p(n)=0+1+\cdots+6+8+9+10=\frac{10\times 11}{2}-7=48$$

이다.