단국대학교 2016학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안(오전)

전형유형	논술우수자
수험번호	
성　　명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가하고, $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다. 또, 함수 $f(x)$가 닫힌 구간에서 연속이면, 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

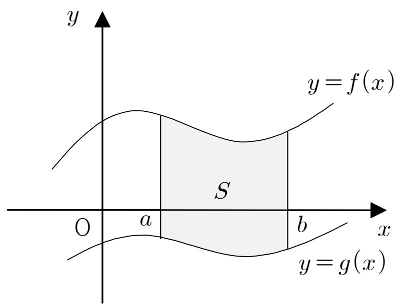
(나) 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$의 미분법을 이용하면 다음과 같은 적분 공식을 얻을 수 있다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

이와 같은 적분법을 부분적분법이라고 한다.

(다) 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b(a<b)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$



[논제 1] 두 곡선 $y=xe^x$, $y=axe^x$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $6\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$일 때, 실수 a의 값을 구하시오. (단, a는 음의 실수) (10점)

[논제 2] 좌표평면에서 곡선 $x^2+y^2=r^2(y>0$, r는 양의 실수) 위를 움직이며 y축에 대하여 대칭인 두 점 P, Q가 있다. 네 점 $(-r,\ 0)$, $(r,\ 0)$, P, Q를 꼭짓점으로 하는 사각형 중 넓이가 최대인 것을 R라 하자. 실수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(1) 곡선 $y=kx^2$은 두 점 P, Q를 지난다.
(2) 사각형 R의 내부에서 곡선 $y=kx^2$의 윗 부분을 뺀 도형의 넓이가 $15\sqrt{3}$이다.

두 실수 r와 k의 값을 구하시오. (20점)

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 정적분의 개념을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 도함수를 이용하여 도형의 최대 넓이를 찾을 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외(2010), 수학 II, 163-169쪽, 188-206쪽
○ 유희찬 외(2010), 적분과 통계, 10-29쪽, 58-64쪽
○ 황선욱 외(2010), 적분과 통계, 20-31쪽, 54-59쪽

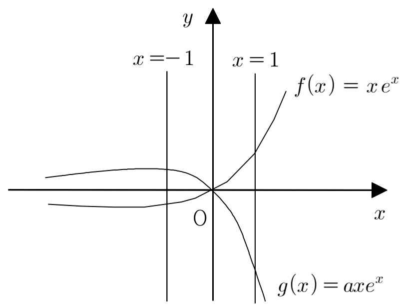
[논제 1 평가기준]
- 두 함수가 만나는 점 $(0,\ 0)$을 찾고, 주어진 구간에서 정적분의 식을 제시 : 5점
- a의 값이 -2임을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]
- 최대가 되는 사각형의 넓이 제시 : 5점
- 곡선의 방정식 제시 : 5점
- 조건 (2)의 도형의 넓이 제시 : 5점
- $r=6$, $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1]
$-1 \le x \le 1$에서 $y = xe^x$은 $y' = e^x(1+x)$이므로 증가함수이고, $y = axe^x$은 $y' = ae^x(1+x)(a<0)$이므로 감소함수이다. 두 곡선 $y = xe^x$과 $y = axe^x$이 만나는 점은 $xe^x - axe^x = 0$이므로 $(0,\ 0)$이다.
두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같다.

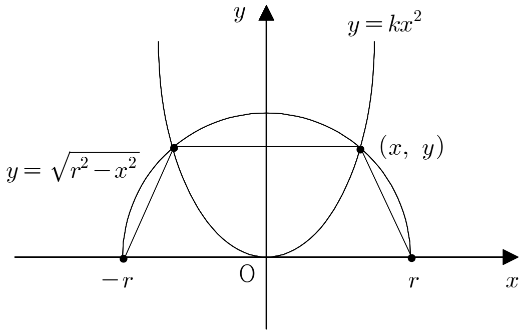
$$\int_{-1}^{0}(axe^x - xe^x)dx + \int_{0}^{1}(xe^x - axe^x)dx$$
$$= (a-1)\int_{-1}^{0} xe^x dx + (1-a)\int_{0}^{1} xe^x dx$$
$$= (a-1)\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0} + (1-a)\left[(x-1)e^x\right]_{0}^{1}$$
$$= 2(1-a) + 2(a-1)e^{-1}$$



따라서 $2(1-a)+2(a-1)e^{-1} = 6\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$이므로 $a=-2$이다.

[논제 2]

먼저, 두 점 P와 Q가 y축에 대칭이므로 사각형 R는 사다리꼴이다. 점 P를 1사분면 위의 점이라 하면, 점 P는 곡선 $x^2+y^2=r^2(y>0)$ 위의 점이므로 이 점의 좌표를 $(x,\ \sqrt{r^2-x^2})$이라 하면, $0<x<r$이고 사각형 R의 넓이는 $A(x)=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}$이다.



함수 $A(x)$의 정의역은 $0<x<r$이고, 도함수는 $A'(x)=\sqrt{r^2-x^2}-\dfrac{x(r+x)}{\sqrt{r^2-x^2}}=\dfrac{-2x^2-xr+r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}$이다.

이제 $A'(x)=0$으로 놓으면 $-2x^2-xr+r^2=0$이므로 $-2(x+r)\left(x-\dfrac{r}{2}\right)=0$이고 $x=\dfrac{r}{2}$ 또는 $x=-r$이다. 그런데 $0<x<r$이므로 $x=\dfrac{r}{2}$이고, $A\left(\dfrac{r}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$이다. $A'(x)$의 부호를 조사하여 $A(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{r}{2}$	$\cdots$	r
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	r^2	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$	$\searrow$	0

위의 표에 의해 $A(x)$는 $x=\dfrac{r}{2}$일 때, 최댓값을 가지므로 사각형 R의 넓이는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$이고, 이때 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{r}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$이다. 점 P는 곡선 $y=kx^2$ 위에 있으므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=k\dfrac{r^2}{4}$으로부터 $k=\dfrac{2\sqrt{3}}{r}$이고, 곡선의 방정식은 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{r}x^2$이다.

사각형 R의 내부에서 곡선의 윗부분의 넓이는 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$와 곡선 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{r}x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 $2\displaystyle\int_0^{\frac{r}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r-\dfrac{2\sqrt{3}}{r}x^2\right)dx=2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}rx-\dfrac{2\sqrt{3}}{3r}x^3\right]_0^{\frac{r}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^2$이다.

사각형 R의 넓이가 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2$이므로 사각형 R의 내부에서 곡선 $y=kx^2$의 윗 부분을 뺀 도형의 넓이는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r^2=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}r^2$이다. 따라서 조건 (2)로부터 $r^2=36$이므로 $r=6$이고, $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

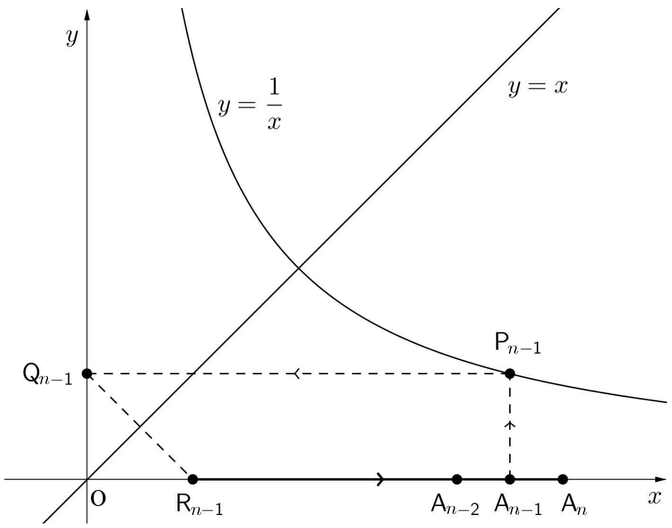
[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

점 A_1과 A_2의 좌표를 $(1, 0)$이라 하자. n이 3 이상의 자연수일 때, 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(1) 점 A_{n-1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 만나는 점을 P_{n-1}, 점 P_{n-1}을 지나고 x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 Q_{n-1}이라 하자.

(2) 점 Q_{n-1}을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 R_{n-1}, 점 R_{n-1}을 x축의 방향으로 점 A_{n-2}의 x좌표만큼 평행이동한 점을 A_n이라 하자.



[논제 1] 두 자연수 d, r에 대하여 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열을 $\{a_n\}$, 첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열을 $\{b_n\}$이라 하자. a가 d의 배수일 때,

$$\{b_n \mid n=1, 2, 3, \cdots\} \subset \{a_n \mid n=1, 2, 3, \cdots\}$$

이 성립함을 보이시오. (10점)

[논제 2] <제시문>에서 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하면 모든 자연수 n에 대하여

$$x_{2n}=\frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}f(n)}$$

일 때, $f(n)$을 구하시오. (20점)

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 등차수열과 등비수열의 개념을 이해하고 있는지를 평가

[논제 2] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

☐ 자료출처

○ 이강섭 외(2010), 수학 Ⅰ, 103-147쪽
○ 이준열 외(2010), 수학 Ⅰ, 114-173쪽
○ 황석근 외(2010), 수학 Ⅱ, 106-148쪽

[논제 1 평가기준]

- $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 일반항을 제시 : 5점
- $m = sr^{n-1} - s + 1$이 자연수임을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 점화식 $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + x_{n-1}$을 제시 : 5점
- $x_{n+1} = \frac{n}{n-1} x_{n-1}$을 제시 : 5점
- x_{2n}을 제시 : 5점
- $f(n) = \{(n-1)!\}^2$임을 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제1]
$\{b_n \mid n=1,2,3,\cdots\} \subset \{a_n \mid n=1,2,3,\cdots\}$임을 보이려면, 모든 자연수 n에 대해 원소 b_n이 집합 $\{a_n \mid n=1,2,3,\cdots\}$의 원소임을 보이면 된다. 즉, 모든 자연수 n에 대해 $b_n = a_m$인 자연수 m이 있음을 보이면 된다. 등비수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = ar^{n-1}$이고 $a_m = a+(m-1)d$이므로

$$b_n = a_m \Leftrightarrow ar^{n-1} = a+(m-1)d \quad \cdots \quad ①$$

이다. 한편, a가 d의 배수이므로 $a = sd$를 만족시키는 자연수 s가 존재한다. 따라서 식 ①을 m에 관해 풀면

$$m = sr^{n-1} - s + 1$$

이고, s와 r이 자연수이므로 m도 자연수이다.
그러므로 $\{b_n \mid n=1,2,3,\cdots\} \subset \{a_n \mid n=1,2,3,\cdots\}$이 성립한다.

[논제2]
점 A_1과 A_2의 좌표가 $(1,0)$이므로 $x_1=1$, $x_2=1$이고 점 P_2의 좌표는 $(1,1)$, 점 Q_2의 좌표는 $(0,1)$, 점 R_2의 좌표는 $(1,0)$이므로 점 A_3의 x좌표 $x_3 = (\mathrm{R}_2$의 x좌표$) + x_1 = 1+1 = 2$이다.

정해진 규칙에 따라 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표는 $(x_n, \frac{1}{x_n})$, $\mathrm{Q_n}$은 $(0, \frac{1}{x_n})$, $\mathrm{R_n}$은 $(\frac{1}{x_n}, 0)$이므로 점화식

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + x_{n-1} \ (\text{단, } n \geq 2\text{인 자연수})$$

를 얻는다. 즉 $x_{n+1}x_n - x_n x_{n-1} = 1$이다. 한편, 자연수 n에 대하여 $y_n = x_{n+1}x_n$이라 놓으면 $y_1 = x_2 x_1 = 1$이므로 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열이다. 따라서 수열 $\{y_n\}$의 일반항은 $y_n = n$, 즉 $x_{n+1}x_n = n$이고, 이로부터 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{n}{x_n} = \frac{n}{n-1}x_{n-1} &= \frac{n}{n-1} \times \frac{n-2}{n-3} x_{n-3} \\ &= \frac{n}{n-1} \times \frac{n-2}{n-3} \times \frac{n-4}{n-5} x_{n-5} \end{aligned}$$

따라서 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n-3}{2n-4} \times \frac{2n-5}{2n-6} x_{2n-6} \\ &= \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n-3}{2n-4} \times \frac{2n-5}{2n-6} \times \cdots \times \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{(2n-1)!}{(2n-2)^2(2n-4)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2} \\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{2(n-1)}\{(n-1)!\}^2} \end{aligned}$$

그러므로 $f(n) = \{(n-1)!\}^2$ 이다.

[문제3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

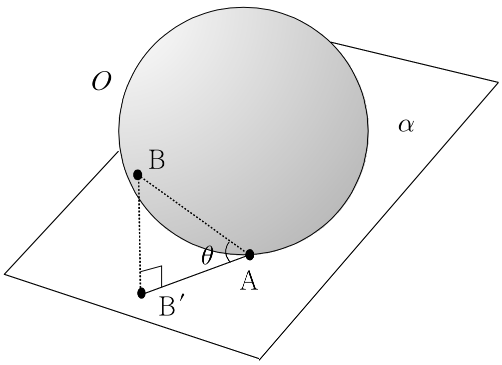
<제시문>

(가) 두 벡터 $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{LN}$이 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$|\overrightarrow{LM}|\,|\overrightarrow{LN}|\cos\theta$$

를 $\overrightarrow{LM}$와 $\overrightarrow{LN}$의 내적이라 하고 기호로 $\overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{LN}$과 같이 나타낸다.

(나) 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 구 O가 점 A에서 평면 α에 접한다. 점 A를 지나고 평면 α와 이루는 각의 크기가 θ인 직선이 구 O와 만나는 점을 $B(\neq A)$라 하고, 점 B의 평면 α 위로의 정사영을 B′이라 하자.
점 A를 출발하여 구 O 위를 움직이며 점 A로 되돌아오는 점 P의 자취 C에 대하여 곡선 C의 평면 α 위로의 정사영 ℓ은 길이가 10인 선분이라고 하자.(단, 점 P는 출발할 때와 도착할 때 이외에는 점 A를 지나지 않는다.)



[논제 1] 좌표공간에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 구와 평면 $x-y+z+a=0$이 만나서 생기는 원 D가 있다. 선분 PQ가 원 D의 지름일 때, 삼각형 OPQ의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$이 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.) (10점)

[논제 2] <제시문> (나)에서 선분 ℓ과 직선 AB′이 이루는 각의 크기가 $45°$이고 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AP}$의 내적이 최대일 때 벡터 $\overrightarrow{AP}$의 길이는 a이다. $\left(\frac{1}{5}a\right)^2$의 값을 구하시오. (30점)

문제 3

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ **출제의도**

[논제 1] 좌표공간에서 평면과 구의 개념을 이해하고 이를 활용하여 거리와 넓이에 관한 개념적인 문제를 해결할 수 있는지를 평가

[논제 2] 정사영의 개념을 이해하고 벡터의 내적을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

☐ **자료출처**

○ 이강섭 외(2010), 기하와 벡터, 108-125쪽, 146-179쪽
○ 김수환 외(2010), 기하와 벡터, 76-108쪽, 112-165쪽
○ 유희찬 외(2010), 기하와 벡터, 149-159쪽

[논제 1 평가기준]

- 구의 중심과 평면과의 거리 $\dfrac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ 을 제시 : 5점
- $a=2\sqrt{6}$ 을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

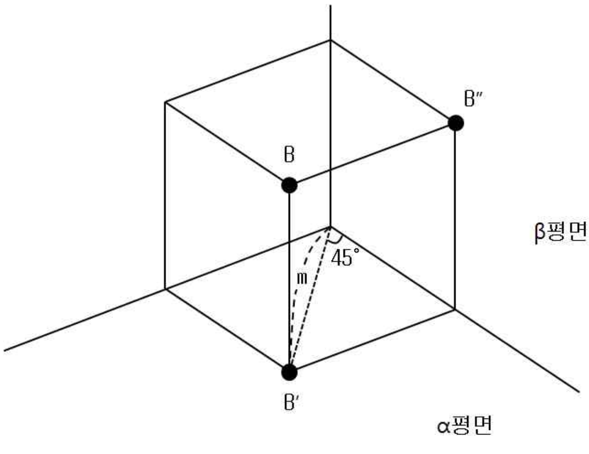
- C가 대원임을 제시 : 5점
- 점 B를 평면 β에 정사영시킨 점($=\mathrm{B}''$)의 위치를 제시 : 5점
- 최대가 되는 점 P의 위치를 제시(<그림 2>의 설명) : 10점
- $\overline{\mathrm{AP}_0}$의 값을 제시 : 10점

□ 예시 답안

[논제 1]
원 D의 중심을 O'이라고 하자. 구의 중심 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$과 평면 $x-y+z+a=0$의 거리는
$\dfrac{|a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$이므로 $\overline{\mathrm{OO}'}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$이고, 이 길이는 삼각형 OPQ의 높이이다.
삼각형 OPQ는 원 D의 지름을 한 변으로 하고, 구의 반지름을 두 변으로 하는 이등변삼각형이다. 원 D의 반지름의 길이를 r라고 하면, $r^2=9-\dfrac{a^2}{3}$이므로 $r=\sqrt{9-\dfrac{a^2}{3}}$이다.
삼각형 OPQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{\sqrt{3}}\times 2\sqrt{9-\dfrac{a^2}{3}}$이다. 문제의 조건으로부터 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{\sqrt{3}}\times 2\sqrt{9-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$이므로 $a=2\sqrt{6}$이다.

[논제 2]
곡선 C의 평면 α 위로의 정사영이 선분이므로 곡선 C는 구 O 위의 원이거나 원의 일부이다.
평면 α가 구 O에 접하므로 곡선 C는 대원(의 일부)이고 ℓ의 길이가 10이고 점 P는 점 A를 출발할 때와 도착할 때만 지나므로 곡선 C는 대원 전체이다.
곡선 C를 포함한 평면을 β라 하고 점 B의 평면 β 위로의 정사영을 B''라 하자.(아래 <그림1>)

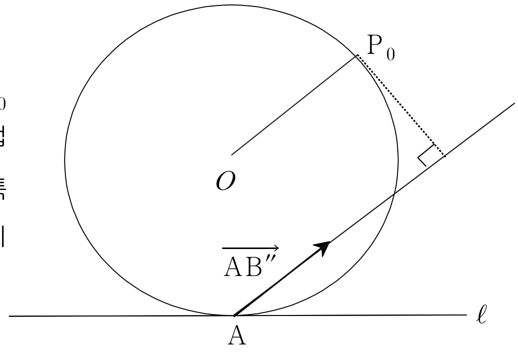
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 직선 AP 위로 정사영시킨 벡터와 $\overrightarrow{\mathrm{AB}''}$을 직선 AP 위로 정사영시킨 벡터가 같은 벡터이므로
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}''}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
이다.



<그림1>

선분 ℓ과 선분 $\overline{\mathrm{AB}'}$이 이루는 각의 크기는 45°이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}'}$의 크기를 m, 점 B''에서 평면 α까지의 거리(=높이)를 h라 하면 구의 중심 O에서 구 위의 점 B까지의 거리가 5이므로
$$m^2+(5-h)^2=25$$
이고, $h=m\times\tan\theta=\dfrac{m}{2}$이므로 $h=2$이다.

옆 그림과 같이 $\overrightarrow{\mathrm{AB}''}$과 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$의 내적이 최대가 되는 점을 P_0이라 하자. 내적이 최대가 되기 위해서는 점 P_0에 접하는 접선이 $\overrightarrow{\mathrm{AB}''}$의 연장선과 수직으로 만나야 하고, 또한 원의 특성에 의해서 점 P_0에 접하는 접선은 선분 $\overline{\mathrm{OP}_0}$과도 수직이다. 그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}''}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$은 평행하다. (<그림2>)



<그림2>

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$의 직선 ℓ 위로 정사영한 벡터의 성분의 길이를 p, 점 O를 지나고 직선 ℓ과 수직인 직선 위로 정사영한 벡터의 성분의 길이를 q라 하자.(아래 <그림3>)

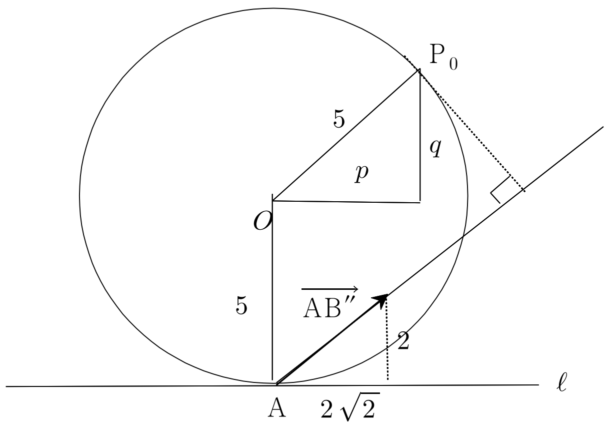
$\overrightarrow{\mathrm{AB}''}$과 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$은 평행하므로 아래 그림과 같이

$$\frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{q}{p} \text{ 이고 } p^2 + q^2 = 25$$

이다. 따라서 $p = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$, $q = 5\frac{1}{\sqrt{3}}$이고 결국 $\overline{\mathrm{AP}_0}$의 길이는 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이가 5이므로

$$\sqrt{\left(5\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(5\sqrt{\frac{1}{3}} + 5\right)^2} = 5\sqrt{2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

이다. 그러므로 정답은 $2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$이다.



<그림3>

<참고> β평면에 좌표평면을 설정해서 풀 수 있다.