문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 미분계수의 기하학적 개념을 이해하여 활용할 수 있는지 평가.

[논제 2] 구분구적분법과 정적분의 개념을 이해하고 활용할 수 있는지 평가.

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2010), 적분과통계, 지학사, 30-43쪽
○ 최용준 외(2010), 적분과통계, 천재교육, 32-49쪽
○ 황석근 외(2010), 수학 II, 교학사, 106-112쪽

[논제 1 평가기준]

- $p=\dfrac{a+b}{2}$를 제시 : 5점
- $\dfrac{1}{8}|b-a|^3$을 제시 : 10점
  (간단하지 않게 도형의 넓이를 제시한 경우 : 부분점수 부여)

[논제 2 평가기준]

- 정적분 값 $A=\dfrac{1}{6}$을 제시 : 5점
- $A_k=\dfrac{1}{6}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k+1}\right)$을 제시 : 5점
- k의 최솟값 4를 제시 : 5점

□ **예시 답안**

[논제1]

접점 P의 좌표를 $P(p^2, p)$라 하면 두 점 $A(a^2, a)$과 $B(b^2, b)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{a+b}$이고, 점 P에서 접선의 기울기는 $\frac{1}{2p}$이다. 따라서 $p = \frac{a+b}{2}$이다.

또, 제시문 (다)에 의해 세 점 $A(a^2, a)$, $B(b^2, b)$, $P(p^2, p)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 $T(a, b)$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left| a^2\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + b^2\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{(a+b)^2}{4}(a-b) \right|$$

$$= \frac{1}{2}|b-a| \left| \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} \right|$$

$$= \frac{1}{8}|b-a|^3$$

이다.

[논제2]

$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{6}$이다. 또, [논제 1]에 의해 두 점 (0,0)과 (1,1)을 지나는 직선과 평행한 접선의 접점은 y좌표가 $\frac{1}{2}$이고, 삼각형 $T(0,1)$의 넓이는 $S_0 = \frac{1}{8}$이다. 같은 방법으로

$$S_1 = \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4},$$

$$S_2 = \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3\right\} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\vdots$$

이고,

$$S_k = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} A_k &= S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_k \\ &= \frac{1}{8}\left\{1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right) \end{aligned}$$

이다. 한편,

$$A - A_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\right\} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 4이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

☐ 출제의도

[논제 1] 정사영의 개념을 이해하는지를 평가

[논제 2] 원과 타원의 개념을 이해하는지를 평가

☐ 자료출처

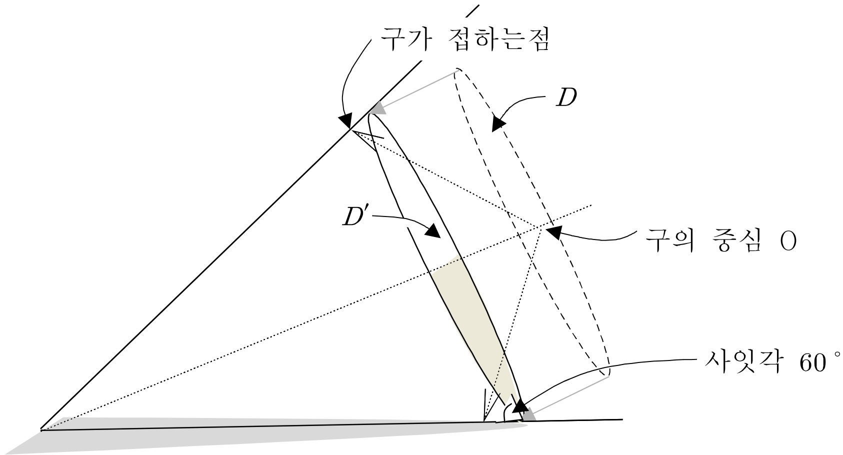
○ 김수환외 (2009), 기하와 벡터, ㈜교학사, 46-58, 90-93쪽
○ 계승혁외 (2009), 기하와 벡터, ㈜성지출판, 52-63, 105-114쪽
○ 김해경외 (2009), 기하와 벡터, ㈜더텍스트, 51-63, 96-100쪽

[논제 1 평가기준]
- 정사영 공식을 제시: 5점
- 정답 2π를 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]
- 타원의 방정식 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$을 제시 : 5점
- 점 $\mathrm{P}\left(3, \frac{16}{5}\right)$에서 타원의 접선의 방정식 $y=-\frac{3}{5}x+5$를 제시 : 10점
- 정답 $\alpha=3+\frac{9\sqrt{34}}{17}$를 제시 : 10점

□ **예시 답안**

[논제 1]



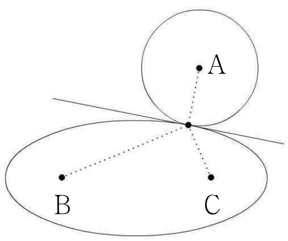
구의 중심 O를 지나고 태양광선에 수직인 평면 중 구의 안쪽 영역(원판)을 D라하고 D를 태양광선이 비추는 방향으로 두 평면과 만날 때까지 평행이동한 원판을 D'이라 하자.
한쪽 평면에 생긴 그림자(그림에서 아래 음영)의 D'이 포함된 평면 위로의 정사영을 생각하면

$$(\text{한쪽 평면에 생긴 그림자의 넓이}) \times \cos 60^\circ = (D'\text{의 넓이}) \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

이다. 따라서 한쪽 평면에 생긴 그림자의 넓이는 π이다. 똑같은 그림자가 다른 쪽 평면 위에도 생기므로 그림자의 총 넓이는 2π이다.

[논제 2]

제시문의 설명에 의해 A에 가장 가까운 점 $\mathrm{P}\left(3, \frac{16}{5}\right)$는 원과 타원이 한 점에서 만날 때이다. 먼저 타원의 초점이



$\mathrm{B}(-3, 0)$, $\mathrm{C}(3, 0)$이므로, 이 때의 타원방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$라 하면 $3=\sqrt{a^2-b^2}$ 이고,

$$2a = \overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PC}} = \sqrt{6^2+(16/5)^2} + 16/5 = 10$$

이다. 따라서 $a=5, b=4$이고

$$\overline{\mathrm{PA}} = 16 - (\overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PC}}) = 6\text{이다.}$$

이제, 타원 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(3, \frac{16}{5}\right)$에서 접선의 방정식은 $y=-\frac{3}{5}x+5$이다. 이 직선은 원과 접하기도 하므로, P에서 접선과 수직으로 만나는 직선(=법선)은 $y=\frac{5}{3}(x-3)+\frac{16}{5}$ 이고, 원의 중심 $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$를 지난다. 그러므로

$$6^2 = (\overline{\mathrm{PA}})^2 = (\alpha-3)^2+(\beta-\frac{16}{5})^2 = (\alpha-3)^2+(\frac{5}{3}(\alpha-3)+\cancel{\frac{16}{5}}-\cancel{\frac{16}{5}})^2 = (\alpha-3)^2\frac{34}{9}$$

로부터 $\alpha=3\pm\frac{9\sqrt{34}}{17}$이다. 그런데 조건에서 $\alpha>6$이므로 구하는 $\underline{\alpha=3+\frac{9\sqrt{34}}{17}}$를 얻는다.

문제 3

□ **출제 의도**

[논제 1]
태양계의 행성의 운동을 설명하는 케플러의 제2법칙을 물리학에서 가장 중요한 법칙 중 하나인 각운동량 보존 법칙을 이용하여 설명할 수 있는지를 평가

[논제 2]
케플러의 제3법칙과 뉴턴의 운동법칙으로부터 만유인력 법칙을 이끌어낼 수 있는지를 평가

□ **자료 출처**

○ 곽영직 외(2011), 과학, 더텍스트, pp. 114-115.
○ 김희준 외(2011), 과학, (주)상상아카데미, p.85, 102.
○ 오필석 외(2011), 과학, 천재교육, pp. 92-95.
○ 안태인 외(2011), 과학, 금성출판사, pp. 77-79.
○ 전동렬 외(2011), 과학, ㈜미래엔컬처그룹, pp. 62-63, 72-75.
○ 정완호 외(2011), 과학, 교학사, pp. 80-82, 84-85.
○ 조현수 외(2011), 과학, 천재교육, pp. 77-82

[논제 1 평가 기준]

(1) 각운동량 보존법칙을 설명하는 내용을 찾아 쓰기 : 5점
"회전 운동의 반지름이 작아지면서 성운의 회전 속도가 빨라진다."을 찾아 썼는지 여부
(2) 케플러의 제2법칙을 설명하기 : 10점
태양과 행성간의 거리가 가까우면 반지름이 작아져 속도가 빨라지고, 태양에서 먼 지점에서는 반지름이 커서 속도가 느려지기 때문에 면적이 일정하다는 것을 기술

[논제 2 평가 기준]

- 행성이 받는 힘과 구심력이 같다는 $F = ma = m \cdot \left(\frac{v^2}{r}\right)$까지만 기술 : 5점
- 행성의 속도 $v = \frac{2\pi r}{T}$를 이용하여 $F = ma = m \cdot \left(\frac{v^2}{r}\right) = m \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$까지만 기술 : 10점
- 케플러의 제3법칙을 이용하여 만유인력이 질량에 비례하고 거리의 제곱에 반비례한다는 것 ($F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$)까지 기술 : 15점

□ **예시 답안**

[논제 1]

・각운동량 보존법칙을 설명한 부분 : 회전 운동의 반지름이 작아지면서 성운의 회전 속도가 빨라진다.

・케플러 제2법칙에 대한 설명 : 각운동량(L)은 물체가 회전하거나 또는 어떤 고정된 한 점을 중심으로 회전하는 물체가 갖는 운동량으로, 물체의 질량(m), 속도(v), 고정된 한 점으로부터 회전하는 물체까지의 거리(r)를 곱한 값($L = mvr$)이다. 태양을 중심으로 타원 운동을 하는 행성의 각운동량은 항상 일정하다. 그 결과 행성이 태양에 가까워지면 빨리 회전하고, 태양으로부터 멀어지면 천천히 회전하게 된다. 따라서 같은 시간동안 태양과 행성을 연결하는 직선이 지나가는 면적은 항상 일정하게 된다.

[논제 2]

뉴턴의 운동법칙으로부터 행성이 태양으로부터 받는 힘은 $F = ma$이고, 행성이 원운동을 한다고 가정하면 구심가속도는 $a = \frac{v^2}{r}$이다. 또한 행성의 공전 속도 $v = \frac{2\pi r}{T}$이므로,

$$F = ma = m \cdot \left(\frac{v^2}{r}\right) = m \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

케플러의 제3법칙은 $T^2 = kr^3$ (k: 비례상수)이므로

$F = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$ 이다. 비례상수 $k = \frac{4\pi^2}{GM}$ (G: 만유인력상수)으로 놓으면, $F = G\frac{Mm}{r^2}$으로 만유인력 법칙이 구해진다.