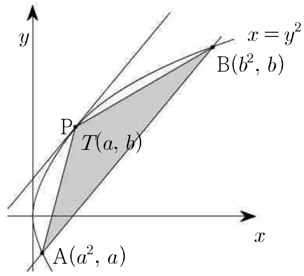
단국대학교 2015학년도 수시모집 논술고사

자연계열 문제 및 답안(오후)

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 좌표평면의 두 점 $\mathrm{A}(a^2, a)$와 $\mathrm{B}(b^2, b)$에 대하여 곡선 $x=y^2$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때, 세 점 $\mathrm{A}, \mathrm{P}, \mathrm{B}$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 APB를 $T(a, b)$라 하자.



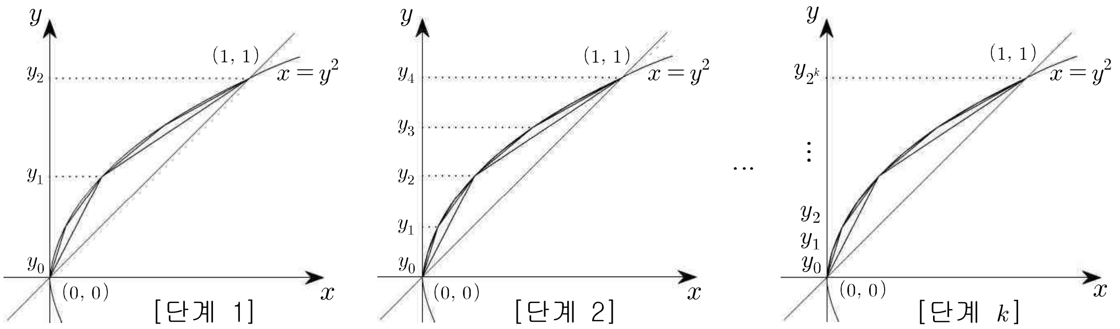
(나) 삼각형 $T(0, 1)$의 넓이를 S_0이라 하자.

[단계 1] 삼각형 $T(0, 1)$의 세 꼭짓점의 y좌표를 크기순으로 y_0, y_1, y_2(단, $y_0 < y_1 < y_2$)라 표기하자. 이 경우 $y_0 = 0$, $y_2 = 1$이다. 두 삼각형 $T(y_0, y_1)$, $T(y_1, y_2)$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

[단계 2] [단계 1]에서 얻어지는 두 삼각형 $T(y_0, y_1)$, $T(y_1, y_2)$의 꼭짓점의 y좌표를 크기순으로 새롭게 표기한 것을 y_0, y_1, y_2, y_3, y_4(단, $y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4$)라 하자. 이 경우 $y_0 = 0$, $y_4 = 1$이다. 네 삼각형 $T(y_0, y_1)$, $T(y_1, y_2)$, $T(y_2, y_3)$, $T(y_3, y_4)$의 넓이의 합을 S_2라 하자.

[단계 k] [단계 $k-1$]에서 얻어지는 2^{k-1}개의 삼각형 $T(y_{i-1}, y_i)(i = 1, 2, \cdots, 2^{k-1})$의 꼭짓점의 y좌표를 크기순으로 새롭게 표기한 것을 y_0, y_1, $\cdots$, y_{2^k} (단, $y_0 < y_1 < \cdots < y_{2^k}$)이라 하자. 2^k개의 삼각형 $T(y_{i-1}, y_i)(i = 1, 2, \cdots, 2^k)$의 넓이의 합을 S_k라 하자.

$A_k = S_0 + S_1 + \cdots + S_k$라 할 때, A_k는 k가 커짐에 따라 직선 $y = x$와 곡선 $x = y^2$으로 둘러싸인 영역의 넓이에 가까워진다.



(다) 좌표평면에서 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 $\mathrm{A}(a_1, b_1), \mathrm{B}(a_2, b_2), \mathrm{C}(a_3, b_3)$일 때, 넓이 S는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$S = \frac{1}{2}\left| a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2) \right|$$

[논제 1] 제시문 (가)에서 정의한 점 P의 y좌표와 삼각형 $T(a, b)$의 넓이를 각각 a, b에 관한 간단한 식으로 나타내시오. (15점)

[논제 2] 직선 $y = x$와 곡선 $x = y^2$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A라 할 때, 제시문 (나)에서 정의한 A_k에 대하여 $A - A_k < \dfrac{1}{2015}$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구하시오. (15점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

<제시문>

(가) 평면 γ 밖의 한 점 P에서 평면 γ에 내린 수선의 발 P'을 점 P의 평면 γ 위로의 정사영이라고 한다. 또, 도형 F에 속하는 각 점의 평면 γ 위로의 정사영 전체의 집합을 도형 F의 평면 γ 위로의 정사영이라고 한다. 예를 들어 태양광선이 책상 위에 수직으로 비출 때 생기는 연필의 그림자는 연필의 책상 위로의 정사영이다.(단, 태양광선은 평행광선으로 간주한다.)

(나) 평면에서 고정점 A에 대하여

$$\overline{\mathrm{PA}} = r \qquad (\text{단, } r\text{은 양의 상수})$$

를 만족시키는 점 P의 집합은 원이다. 고정된 두 점 B, C에 대하여

$$\overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PC}} = s \qquad (\text{단, } s\text{는 } \overline{\mathrm{BC}} < s\text{인 상수})$$

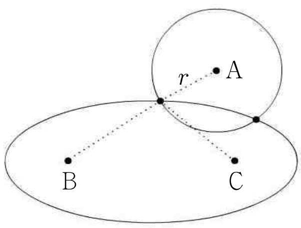
를 만족시키는 점 P의 집합은 타원이다. 원과 타원을 이용하여, 고정된 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PC}} = \ell \quad (\text{단, } \ell\text{은 } \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BC}} < \ell\text{인 상수})$$

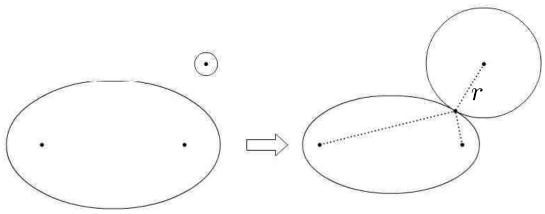
를 만족시키는 점 P를 생각해 보자.

1. 점 P는 어떤 $r(r \geq 0)$에 대하여 A가 중심이고 반지름의 길이가 r인 원($r=0$일 때는 한 점)과 B, C로부터 거리의 합이 $\ell - r$인 타원이 만나는 점이다. ([그림 1])

2. B와 C로부터 거리의 합이 ℓ인 타원의 외부에 점 A가 있는 경우를 살펴보자. 중심이 A이고 반지름의 길이가 r이 아주 작은 원은 B와 C로부터 거리의 합이 $\ell - r$인 타원과 만나지 않는다. 그렇지만 반지름의 길이 r을 점점 크게 하면서 원과 타원이 처음으로 만날 때에는 [그림 2]와 같이 서로 한 점에서 만난다.



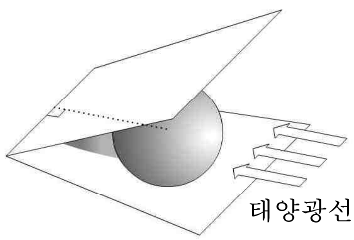
[그림1]



[그림2]

(다) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$ 이다.

[논제 1] 그림과 같이 사잇각이 60°인 두 평면 사이에 반지름이 1인 구가 두 평면과 각각 한 점에서 만난다. 구의 중심을 지나면서 두 평면의 교선에 수직인 직선과 평행한 방향으로 태양광선이 비출 때, 두 평면에 나타나는 그림자의 넓이를 구하시오. (15점)



[논제 2] 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{B}(-3, 0)$, $\mathrm{C}(3, 0)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}} + \overline{\mathrm{PC}} = 16$$

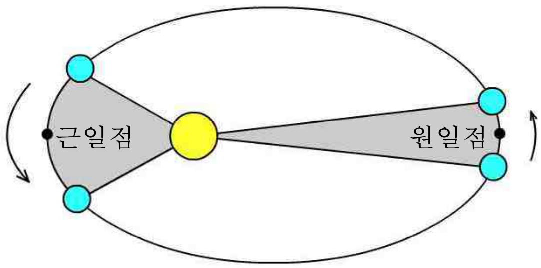
을 만족시키는 점 P 중에서 점 A에 가장 가까운 점의 좌표가 $\mathrm{P}\left(3, \dfrac{16}{5}\right)$이다. 제시문 (나)를 이용하여 α의 값을 구하시오.(단, $\alpha > 6$이고, $289 = 17^2$ 이다.) (25점)

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 약 137억 년 전에 우주가 태어나고, 약 46억 년 전에 우리 은하에 있던 기체와 작은 먼지들이 모여 천천히 회전하는 태양계 성운이 형성되었다. 이후 성운에서 밀도가 불균일한 부분이 생겨 서서히 회전하면서 수축하게 되었다. 회전하는 성운 내에서는 물질들 사이에 미치는 중력으로 말미암아 성운 물질들이 점점 중심으로 모여들게 되는데, 시간이 지날수록 성운의 중심을 향하여 수축하는 속도가 빨라지고 회전 운동의 반지름이 작아지면서 성운의 회전 속도가 빨라졌다. 그래서 가장 강하게 수축이 일어나는 중심부는 불룩해져 원시 태양을 형성하고, 그 주변에는 같은 방향으로 회전하는 납작한 원시 원반이 만들어졌다.

(나) 행성이 타원 궤도를 따라 태양 주위를 공전하기 때문에 행성의 운동 속도는 일정하지 않다. 행성의 공전 궤도상에서 태양에 가장 가까운 곳을 근일점이라고 하고, 가장 먼 곳을 원일점이라고 한다. 행성의 공전 속도는 일정하지 않은데, 그림과 같이 동일한 시간에 태양과 행성을 연결하는 직선이 지나가는 면적은 항상 같다. 이를 케플러의 제2법칙 또는 면적 속도 일정 법칙이라고 한다.



(다) 케플러는 행성의 공전 주기와 공전 궤도의 긴 반지름 사이에 일정한 규칙이 있음을 알아내었다. 즉, 행성 공전 주기의 제곱이 타원 궤도 긴 반지름의 세제곱에 비례한다는 것으로, 이를 케플러의 제3법칙 또는 조화 법칙이라고 한다. 케플러가 정리한 행성의 운동 법칙을 과학적으로 완벽하게 설명한 것은 뉴턴이었다. 뉴턴은 자신의 운동 법칙(힘과 가속도의 법칙, $F=ma$)과 케플러의 제3법칙을 이용하여 행성이 돌고 사과가 떨어지도록 하는 힘, 즉 만유인력 법칙을 이끌어 내었다. 만유인력 법칙은 행성의 운동 원인은 물론 우주의 어느 곳에나 보편적으로 적용되는 과학 법칙으로 우주에 관한 현대적인 이론이 발달하는 초석이 되었다.

[논제 1] 제시문 (가)에서 각운동량 보존법칙을 설명하는 내용을 찾아 쓰고, 각운동량 보존법칙을 이용하여 제시문 (나)의 케플러의 제2법칙을 설명하시오. (300자 내외) (15점)

[논제 2] 제시문 (다)에 제시된 케플러의 제3법칙으로부터 뉴턴의 만유인력 법칙을 유도하시오. 단, 행성의 질량 m, 태양의 질량 M, 행성의 궤도 반지름 r, 공전 속도 v, 공전 주기 T를 사용하며, 구심력은 $m\frac{v^2}{r}$임을 이용하시오. (300자 내외) (15점)