문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 벡터의 덧셈을 이해하고 크기를 구할 수 있는지를 평가

[논제 2] 벡터의 연산을 응용하여 최대, 최소에 관한 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이강섭 외(2010), 기하와 벡터, 지학사, 135-140쪽, 156-161쪽
○ 황선욱 외(2010), 기하와 벡터, 좋은책 신사고, 112-117쪽, 135-142쪽
○ 정상권 외(2010), 기하와 벡터, 금성출판사, 121-125쪽, 139-146쪽

[논제 1 평가기준]
- 대각선의 길이(예를 들어, $\overline{AD}=4$ 또는 $\overline{AC}=2\sqrt{3}$)을 제시 : 5점
- 답이 $6\sqrt{3}$ 임을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]
- $\overline{BC}=2\sqrt{3}$ 임을 제시 : 5점
- 최솟값 $2\sqrt{7}-2$와 최댓값 $2\sqrt{7}+2$ 중 하나를 제시 : 5점
- 최솟값 $2\sqrt{7}-2$와 최댓값 $2\sqrt{7}+2$를 모두 제시 : 5점

□ 예시 답안

[논제 1]
사각형 ABCD는 등변사다리꼴이고 $\overline{AB}=2$, $\overline{DA}=4$이다. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$의 시점이 A일 때 종점 D′은 반직선 $\overrightarrow{AD}$ 위의 점 중 $\overline{AD'}=6$인 점이다. 마찬가지 방법으로 $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FD}$의 시점이 E일 때 종점 D″은 반직선 $\overrightarrow{ED}$ 위의 점 중 $\overline{ED''}=6$인 점이다. 이제 $\overrightarrow{ED''}$의 시점이 A가 되도록 평행이동시켜 생각하면 $\overrightarrow{AD'}$과 $\overrightarrow{ED''}$의 사잇각은 60°이므로
$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FD}|=|\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{ED''}|=\sqrt{(\overline{AD'})^2+(\overline{ED''})^2+2(\overline{AD'})(\overline{ED''})\cos 60^\circ}=6\sqrt{3}$이다.

[논제 2]
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}$의 시점이 A일 때 종점 P′은 점 P를 $\overrightarrow{BC}$만큼 평행이동시킨 점이므로 점 P가 원 O위를 움직일 때 점 P′은 원 O를 $\overrightarrow{BC}$만큼 평행이동시킨 원 O'위를 움직이게 된다. 따라서 원 O'의 중심을 O′이라고 하면 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값은 $\overline{AO'}-2$, 최댓값은 $\overline{AO'}+2$이다.

선분 AC는 원 O의 지름이므로 $\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$이다. 따라서 원 O의 중심을 O, 선분 AB의 중심을 M이라 하면 BC//OM이고 BC//OO′이므로 세 점 M, O, O′은 한 직선 위에 놓여 있다.
한편 $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$이므로 $\overline{\mathrm{MO'}} = \overline{\mathrm{MO}} + \overline{\mathrm{OO'}} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$이고,
$\overline{\mathrm{AO'}} = \sqrt{(\overline{\mathrm{AM}})^2 + (\overline{\mathrm{MO'}})^2} = \sqrt{1+27} = 2\sqrt{7}$이다.
따라서 최솟값은 $2\sqrt{7}-2$, 최댓값은 $2\sqrt{7}+2$이다.

(별해) 벡터와 관련된 문제는 좌표를 이용하여 다소 복잡한 계산을 통하여 대수적인 방법으로 해결할 수도 있다. 예를 들어 좌표평면에서 $\mathrm{A}(-2,0)$, $\mathrm{B}(-1, \sqrt{3})$, $\mathrm{C}(2,0)$이라고 하면 세 점 A, B, C는 문제의 조건을 만족시킨다. 원 $x^2+y^2=4$위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (4,0) + (x+1, y-\sqrt{3}) = (x+5, y-\sqrt{3})$이다. 이제 $k = |\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}|$라 하면
$k = \sqrt{(x+5)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2+10x+25+y^2-2\sqrt{3}y+3} = \sqrt{10x-2\sqrt{3}y+32}$이다.
이 때, k의 최대, 최솟값은 직선 $10x-2\sqrt{3}y+32-k^2=0$이 원 $x^2+y^2=4$에 접하는 경우에 구해진다.
직선의 방정식으로부터 얻어진 식 $(2\sqrt{3}y)^2 = (10x+32-k^2)^2$을 원의 방정식 $x^2+y^2=4$에 대입하면
$112x^2 + 20(32-k^2)x + (32-k^2)^2 - 48 = 0$을 얻는다. 이제 이차방정식의 판별식으로부터

$$\begin{aligned} D/4 &= 100(32-k^2)^2 - 112\{(32-k^2)^2 - 48\} \\ &= -12(32-k^2)^2 + 112 \times 48 \\ &= 0 \end{aligned}$$

이다. 이로부터 $k = 2\sqrt{7} \pm 2$를 얻는다.
따라서 최솟값은 $2\sqrt{7}-2$, 최댓값은 $2\sqrt{7}+2$이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

[논제 1] 미분가능한 함수를 이해할 수 있는지를 평가

[논제 2] 역함수의 미분을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 양승갑외 (2010), 수학II, ㈜금성출판사, 125-129쪽, 144-148쪽
○ 유희찬외 (2010), 수학II, (주)미래엔, 117-121쪽, 137-140쪽
○ 최용준외 (2010), 수학II, 천재교육, 108-115쪽, 125-128쪽

[논제 1 평가기준]
- $k=-1$임을 제시 : 7점
- $g'(2k)+g'(-2k)=\frac{10}{9}$임을 제시 : 8점

[논제 2 평가기준]
- $f^{-1}(0)\le 1$을 제시 : 5점
- $f^{-1}(0)=1$이면 $(f^{-1})'(0)=b\left(\frac{1}{f}\right)'(0)$임을 제시 : 10점
- 그래프를 제시 : 10점 (그래프가 정확히 제시되지 않은 경우는 부분점수 부여)

□ 예시 답안

[논제 1]
$f(x)=x+k$이므로 $f^{-1}(x)=x-k$이다.
(i) $k=-\frac{1}{2}$이면 $g(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & \left(x\ge -\frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(x< -\frac{1}{2}\right)\end{cases}$은 $x=-\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $k\ne -\frac{1}{2}$이면 $g(x)=\max\left\{x-k, \frac{2k+1}{x+k}\right\}$의 정의역은 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ne -k\}$이다.

$g(x)$가 정의역 전체에서 미분가능하려면 $x-k=\frac{2k+1}{x+k}$을 만족시키는 실수 $x=\pm(k+1)$에서 $1=\frac{-2k-1}{(x+k)^2}$이 성립해야 한다.

$x=k+1$일 때, $(2k+1)^2=-2k-1$로부터 $4k^2+6k+2=0$이므로 $k=-1$또는 $k=-\frac{1}{2}$이다.

$k \neq -\frac{1}{2}$이므로 $k=-1$이다.

또한 $x=-k-1$일 때, $1=-2k-1$로부터 $k=-1$이다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여 $g(x)$는 $k=-1$일 때만 정의역의 모든 점에서 미분가능하다.

한편, $k=-1$일 때 $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x>1) \\ \frac{-1}{x-1} & (x<1) \end{cases}$ 이므로

$g'(x)=\begin{cases} 1 & (x>1) \\ \frac{1}{(x-1)^2} & (x<1) \end{cases}$ 이다. 따라서

$g'(2k)+g'(-2k)=g'(-2)+g'(2)=\left(\frac{1}{(-2-1)^2}\right)+1=\frac{10}{9}$이다.

[논제 2]

$f(x)$가 삼차함수이므로 $a \neq 0$이다. 또한 $h(x)$의 정의역에 0이 속해 있어야 하므로 $f(0) \neq 0$으로부터 $b \neq 0$이다.

이제 $h(0)=\max\left\{f^{-1}(0), \frac{b}{f(0)}\right\}=\max\{f^{-1}(0), 1\}=1$이므로 $f^{-1}(0) \leq 1$이다.

또한 $h'(0)$이 존재하려면 다음 (1) 또는 (2)가 성립해야 한다.

(1) $f^{-1}(0)<1$

(2) $f^{-1}(0)=1$이면 $(f^{-1})'(0)=b\left(\frac{1}{f}\right)'(0)$이다.

(1)이 성립할 때

(i) $a>0$인 경우에는 f가 증가함수이므로 $f^{-1}(0)<1$이려면 $0<f(1)$이어야 한다.
$f(1)=2a+b$이므로 $2a+b>0$이다.

(ii) $a<0$인 경우에는 f가 감소함수이므로 $f^{-1}(0)<1$이려면 $0>f(1)$이어야 한다.
따라서 $2a+b<0$이다.

(2)가 성립할 때

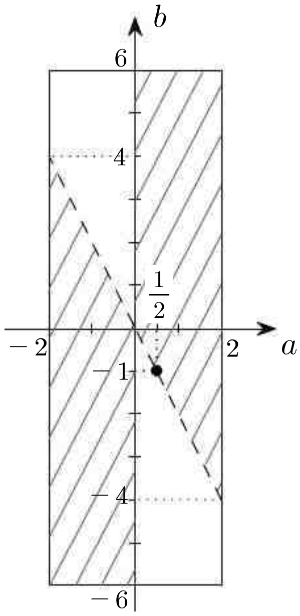
$f^{-1}(0)=1$로부터 $f(1)=0$이므로 $2a+b=0$이다. ⋯ (*)

$(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4a}$이고, $b\left(\frac{1}{f}\right)'(0)=\frac{-bf'(0)}{(f(0))^2}=-\frac{a}{b}$이므로

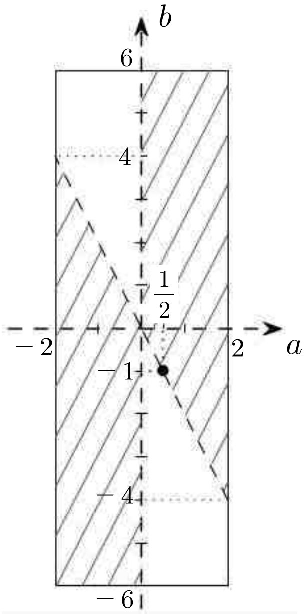
$(f^{-1})'(0)=b\left(\frac{1}{f}\right)'(0)$으로부터 $b=-4a^2$이다. ⋯ (**)

식 (*)을 (**)에 대입하면 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$을 얻는다.

구하는 영역은 다음과 같이 그려진다.



또는



(단, a축과 b축은 영역에 포함되지 않는다.)

문제 3

□ 출제 의도

[논제 1]
전자 배열, 전자껍질 및 여덟 전자 규칙을 이해하고, 이를 토대로 공유 결합의 원리를 통한 물 분자의 형성 과정을 설명할 수 있는지를 평가

[논제 2]
에너지 전환 및 열역학 제2법칙을 이해하고, 에너지가 전환되는 과정에서 영구 기관이 존재할 수 없음을 설명할 수 있는지를 평가

□ 자료 출처

○ 곽영직 외(2011), 과학, 더텍스트, pp. 73-75, 402-403
○ 김희준 외(2011), 과학, (주)상상아카데미, pp. 74-75, 334-335
○ 오필석 외(2011), 과학, 천재교육, pp 70-71, 366-369.
○ 안태인 외(2011), 과학, 금성출판사, pp. 50-51, 342-343
○ 전동렬 외(2011), 과학, ㈜미래엔컬처그룹, pp. 46-47, 371-372
○ 정완호 외(2011), 과학, 교학사, pp. 49-50, 360-361
○ 조현수 외(2011), 과학, 천재교육, pp. 49, 319

[논제 1 평가 기준]

(1) 산소 원자의 전자 배열 : 산소의 전자껍질이 두 겹으로 되어 있으며 안쪽과 바깥쪽에 각각 2개와 6개의 전자가 있음을 기술 : 5점
(2) 물 분자의 형성
산소 원자 1개와 수소 원자 2개가 공유 결합을 하여 물 분자를 형성할 때,

- 산소 원자는 수소 원자 2개로부터 각각 1개씩의 전자를 공유하여 8개의 전자를 채워 안정된 구조가 된다는 설명과 수소 원자가 산소 원자로부터 각각 1개씩의 전자를 공유하여 2개의 전자를 채워 안정된 구조가 된다는 설명을 모두 기술 : 10점
- 산소 원자 또는 수소 원자 중 한 종류의 원자에 대해서만 기술 : 5점

[논제 2 평가 기준]

(1) 불가능함을 선택 : 5점
(2) 불가능한 이유에 관한 설명 - (열역학 제2법칙에 따르면) 온도가 낮은 바닷물에서 온도가 높아진 물체로 열이 자발적으로 이동할 수 없음을 기술 : 10점

□ **예시 답안**

[논제 1]

- 산소 원자의 전자 배열 : 8개의 전자를 포함하는 산소는 두 개의 전자껍질로 구성된다. 안쪽 전자껍질에는 2개의 전자가, 바깥쪽 전자껍질에는 6개의 전자가 배열된다.
- 물 분자의 형성 : 헬륨보다 무거운 원자들은 여덟 전자 규칙에 따라 가장 바깥 껍질에 8개의 전자가 있는 경우가 가장 안정하다. 산소 원자는 2개의 수소 원자와 결합하여 각각 한 개씩의 전자를 공유하여 바깥쪽 전자껍질에 8개의 전자가 있는 효과를 얻어 안정된 구조가 된다. 수소 원자도 산소 원자의 전자 하나를 공유하여 2개의 전자가 있는 효과가 되어 안정된 구조가 된다.

[논제 2]

- 가능 여부 : 가능하지 않다.
- 이유 : 발명가는 바닷물보다 온도가 낮은 물체를 바닷물에 접촉하여 바닷물의 온도를 낮추어 얼음으로 만들고 이때 발생하는 열에너지를 이용하려고 한다. 이 과정이 반복되면 물체의 온도가 계속 증가하여 바닷물보다 높아져 더 이상 바닷물의 온도를 낮출 수 없게 된다. 열역학 제2법칙에 따르면 자연계에서 일어나는 모든 현상은 무질서도가 증가하는 방향으로 일어나는데, 열이 차가운 곳에서 뜨거운 곳으로 이동하는 것은 무질서도가 감소하는 방향이므로 자발적으로 일어날 수 없다. 따라서 외부에서 지속적으로 일을 해주지 않는 이상 이 기관은 가능하지 않다.