단국대학교 2015학년도 수시모집 논술고사

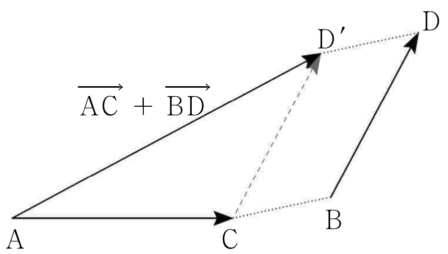
자연계열 문제 및 답안(오전)

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

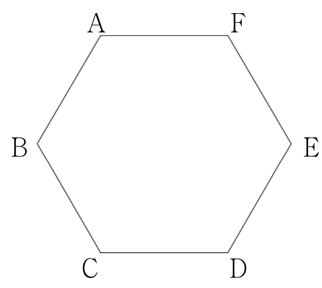
<제시문>

(가) 시점이 다르더라도 크기와 방향이 같은 두 벡터는 동일한 벡터라는 사실은 도형과 관련된 벡터의 문제 해결에 자주 사용된다. 예를 들어 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 시점이 다른 경우 $\vec{a}+\vec{b}$를 구할 때, $\vec{a}$ 또는 $\vec{b}$를 두 벡터의 시점이 일치하거나 한 벡터의 시점이 다른 벡터의 종점과 일치하도록 평행이동시키는 등의 방법으로 그림을 그려 생각하면 유용하다.

(나) 네 점 A, B, C, D에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$를 생각해 보자. 시점이 B인 벡터 $\overrightarrow{BD}$를 시점이 C인 벡터가 되도록 평행이동시키려면 B와 D를 각각 $\overrightarrow{BC}$만큼 이동시켜야 한다. 따라서 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$의 시점이 A이면 종점 D′은 D를 $\overrightarrow{BC}$만큼 이동시킨 점이 된다. 즉, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD'}$이다.



[논제 1] 오른쪽 그림과 같은 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FD}|$의 값을 구하시오. (15점)



[논제 2] 반지름의 길이가 2인 원 O위의 세 점 A, B, C가 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=4$를 만족시킨다. 점 P가 원 O위를 움직일 때 $|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오. (15점)

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (40점)

<제시문>

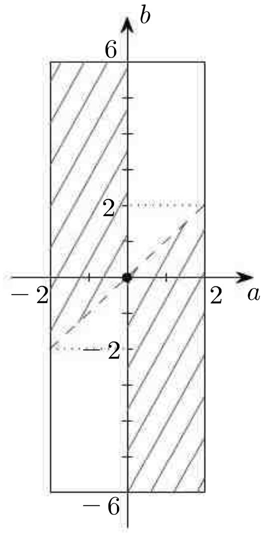
(가) 두 실수 a, b 중 작지 않은 값을 $\max\{a,b\}$라 하자. 두 함수 $f:A\to\mathbb{R}$, $g:B\to\mathbb{R}$이 주어졌을 때, $A\cap B$의 각 원소 x에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$라 하자. $f(x)$와 $g(x)$가 모두 연속함수이면 $h(x)$도 연속함수가 되지만, 다음의 예에서 볼 수 있듯이 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 미분가능한 함수이더라도 $h(x)$는 미분가능하지 않은 경우가 있을 수 있다. (단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합이다.)

(예) $\mathbb{R}$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)=x$, $g(x)=-x$에 대하여 $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(나) 특별한 언급이 없는 경우 함수의 정의역은 그 함수가 정의되는 가장 큰 집합을 의미한다. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$이 일대일 대응이면 $f^{-1}(x)$의 정의역도 $\mathbb{R}$이므로, k가 0이 아닌 실수일 때 함수 $g(x)=\max\left\{f^{-1}(x),\dfrac{k}{f(x)}\right\}$의 정의역은 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)\neq 0\}$이다.

(다) x에 대한 방정식 $ax^2+2ax+b=0$이 서로 다른 실근을 갖도록 하는 두 실수 a와 b의 조건을 생각해 보자. $a=0$이면 $b=0$일 때 무수히 많은 실근을 가지므로 조건을 만족시킨다. $a\neq 0$이면 이차방정식의 판별식에 의하여 $a^2-ab=a(a-b)>0$일 때 서로 다른 실근을 가진다. 이 때, a와 b의 관계를 a축과 b축으로 이루어진 좌표평면에 영역으로 나타내면 오른쪽과 같다.(단, $-2\le a\le 2$, $-6\le b\le 6$인 범위에서만 그리기로 한다.)

여기서 직선 $b=a$의 점선표기는 이 직선이 영역에 포함되지 않음을 의미하여 원점에 표기한 굵은 점은 이 점이 영역에 속해 있음을 의미한다. 좌표축이 영역에 포함되지 않음을 고려해야할 경우는 오른쪽 예의 괄호안의 서술과 같이 기술하거나 좌표축을 점선으로 그리기로 한다.



(단, 원점을 제외한 b축은 영역에 포함되지 않는다.)

[논제 1] 함수 $f(x)=x+k$(단, k는 상수)에 대하여, $g(x)=\max\left\{f^{-1}(x),\dfrac{2k+1}{f(x)}\right\}$이라 하자. 함수 $g(x)$가 $g(x)$의 정의역 전체에서 미분가능할 때의 k값을 구하고, 이 때 $g'(2k)+g'(-2k)$의 값을 구하시오. (15점)

[논제 2] 삼차함수 $f(x)=ax^3+ax+b$에 대하여, 함수 $h(x)=\max\left\{f^{-1}(x),\dfrac{b}{f(x)}\right\}$가 0을 정의역의 원소로 갖는다고 하자. $h(0)=1$이고 $h'(0)$이 존재하도록 하는 두 실수 a와 b의 관계를 a축과 b축으로 이루어진 좌표평면에 영역으로 나타내시오.(단, 제시문 (다)를 참조하여 $-2\le a\le 2$, $-6\le b\le 6$인 범위에서만 그리기로 한다.) (25점)

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (30점)

<제시문>

(가) 주기율표에서 가로줄을 주기라고 하며, 1~7주기까지 있다. 또 세로줄을 족이라고 하며, 1~18족까지 있다. 전자껍질은 전자가 채워지는 궤도로 주기가 같은 원소는 전자껍질 수가 같다. 즉, 수소나 헬륨과 같은 1주기 원소들은 전자껍질이 1개이며 탄소나 질소, 산소와 같은 2주기 원소들은 전자껍질이 2개이다. 가장 바깥쪽 전자껍질에 존재하는 전자를 최외각 전자라고 한다. 원자의 성질은 최외각 전자가 몇 개인가에 따라 달라지며, 같은 족 원소는 최외각 전자의 수가 같다. 수소는 두 개의 전자가 쌍을 이루고 있을 때 더 안정하다. 그래서 두 개의 수소 원자가 서로의 전자를 공유함으로써 안정된 수소 분자를 이룬다. 이처럼 원자들이 전자를 공유해 이루어진 결합을 공유 결합이라 하고, 공유 결합으로 생성된 원자의 집단을 분자라고 한다. 공유 결합은 안정된 구조의 분자를 만드는 데 중요한 역할을 한다. 생명 현상에 필수적인 물 분자도 두 개의 수소 원자가 한 개의 산소 원자와 전자를 공유하는 공유 결합을 이루고 있다.

(나) 지구의 표면은 70% 이상이 물로 덮여 있으며, 특히 바닷물은 훌륭한 재생 에너지원이 될 수 있다. 어떤 발명가가 바닷물을 이용하여 외부의 지속적인 에너지 공급 없이 스스로 영원히 작동하면서 순환 과정이 반복될 때마다 외부에 일정량의 일을 하는 기관을 만들려고 한다. 그는 바닷물에 차가운 물체를 접촉시켜 바닷물이 가진 열에너지를 빼 내어 얼음으로 만들고, 이때 나오는 열에너지를 이용하여 동력 기관을 움직이려고 한다. 바닷물은 무궁무진하므로 무한한 에너지를 생산할 수 있어 인류는 에너지 걱정 없이 살 수 있을 것이라고 생각한다.

(다) 에너지 전환 과정에서 에너지는 형태만 바뀔 뿐 총량은 보존되며, 외부로 확산된 열에너지를 다시 회수하여 사용할 수는 없다. 이와 같이 자연 현상에는 일정한 방향성이 있는데, 다양한 에너지 전환 과정에서 모든 에너지는 결국 무질서하고 통제하기 어려우며 널리 퍼져 버리는 열에너지로 전환되고 이 열에너지를 원래 형태의 에너지로 되돌릴 수는 없다. 예를 들어, 얼음과 끓고 있는 물을 섞으면 얼음은 녹고 물의 온도는 감소하지만, 반대로 물이 스스로 얼어서 얼음과 끓고 있는 물로 나누어지지는 않는다.

[논제 1] 제시문 (가)를 참고하여 산소 원자의 전자껍질에서의 전자 배열을 설명하고, 어떻게 공유 결합을 통해서 안정한 물 분자가 형성되는지 수소 원자와 산소 원자의 전자 배열 관점에서 설명하시오. (300자 내외) (15점)

[논제 2] 제시문 (다)를 참고하여 제시문 (나)에서 발명가가 제안한 기관이 현실에서 가능한지 결정하고, 그렇게 생각한 이유를 열역학 법칙을 사용하여 설명하시오. (300자 내외) (15점)