문항 3

출제의도 및 평가기준

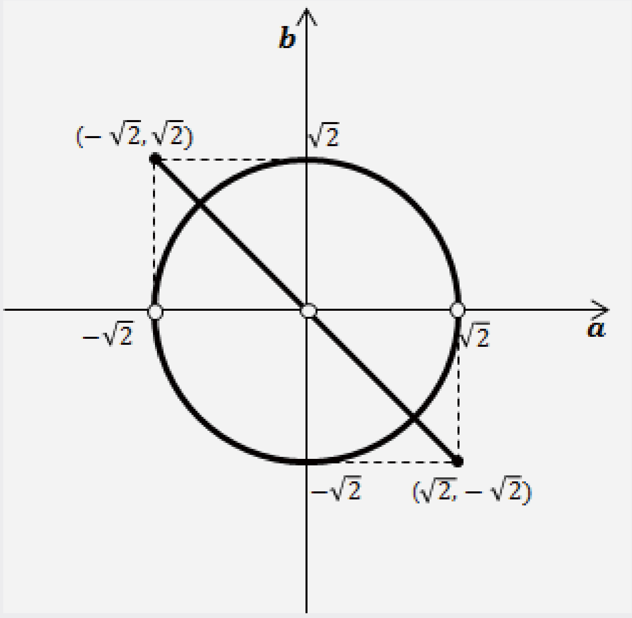
01. 출제의도

가) 원의 방정식의 의미를 이해하고 구할 수 있는지 확인한다.
나) 선분의 수직이등분선을 구할 수 있는지 확인한다.
다) 두 점 사이의 거리를 활용할 수 있는지 확인한다.
라) 조건을 만족하는 모든 점을 좌표평면 위에 나타낼 수 있는지 확인한다.
마) 좌표평면에서 원과 점의 위치관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
바) 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
사) 두 수의 대소를 비교할 수 있는지 확인한다.

02. 평가기준

[논제 1] (20점)

우선 $b \neq 0$이므로 $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$이고 $\mathrm{Q} \neq \mathrm{R}$이다. 그러므로 $\mathrm{P} = \mathrm{R}$ $(a+b=0)$인 경우와 $\mathrm{P} \neq \mathrm{R}$ $(a+b \neq 0)$인 경우로 나누어서 생각한다. **1) $a+b \neq 0$인 경우** 제시문 (ㄴ)의 세 점 P, Q, R을 지나는 원은 삼각형 $\triangle \mathrm{PQR}$의 외접원이다. 따라서 원의 중심은 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 수직이등분선과 $\overline{\mathrm{PR}}$의 수직이등분선의 교점이다. 선분 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 수직이등분선은 $a \neq 0$인 경우 $y = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2}$, $a = 0$인 경우 $y = \frac{b}{2}$이다. 즉 $y = -\frac{a}{b}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{b}{2}$이다. 선분 $\overline{\mathrm{PR}}$의 수직이등분선이 $x = \frac{a+b}{2}$이므로 세 점을 지나는 원의 중심은 $\left(\frac{a+b}{2}, -\frac{a-b}{2}\right)$이다. 외접원의 반지름이 1이므로 실수 a, b가 만족하는 식은 $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a-b}{2}\right)^2 = 1.$$ 즉, $$a^2 + b^2 = 2 \text{ (단, } a+b \neq 0,\ b \neq 0).$$	5점

2) $a+b=0$인 경우 반지름이 1인 원이 좌표평면 위의 두 점을 지나기 위해서는 두 점 사이의 거리가 2 이하면 된다. 따라서 a의 범위는 다음과 같다. $$\left\|\overline{\mathrm{PQ}}\right\| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-a)^2} = \sqrt{2}\,\|a\| \le 2. \text{(*)}$$ 그러므로 제시문 (ㄴ)의 조건 i)와 부등식 (*)에 의해 $$a+b=0 \qquad (-\sqrt{2} \le a < 0,\ \ 0 < a \le \sqrt{2})$$	5점
1), 2)의 경우에 의해서 집합 E에 속한 모든 점을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.  	10점

[논제 2] (20점)

제시문 (ㄱ)에 의해서 E의 한 점 (x,y)와 점 S 사이의 거리 l은 다음과 같다.

$$l=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2}\ \ (\text{단, } (x,y)\in E)$$

1) 점 (x,y)가 $x^2+y^2=2$ (단, $y\neq 0$)을 만족하는 경우

원 $x^2+y^2=2$의 중심을 O라고 하자. 점 S가 원 $x^2+y^2=2$의 외부에 있으므로, $y\neq 0$인 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점 (x,y)와 점 S 사이의 거리는 점 (x,y)가 선분 $\overline{\mathrm{OS}}$와 원 $x^2+y^2=2$ $(y\neq 0)$의 교점일 때 최소가 된다. 점 S의 y좌표가 0이 아니므로 원 $x^2+y^2=2\,(y\neq 0)$ 교점이 존재하고 이 때의 거리는 다음과 같다.

$$m_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

5점

2) 점 (x,y)가 $x+y=0$ (단, $0<|x|\leq\sqrt{2}$)을 만족하는 경우

$$\begin{aligned} l=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(y-1)^2}&=\sqrt{(x+\sqrt{2})^2+(x+1)^2}\\ &=\sqrt{2\left(x+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

여기서 $-\sqrt{2}\leq-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}<0$ 이므로 거리의 최솟값은 다음과 같다.

$$m_2=\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5점

1), 2)에 의해서 m은 $m_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}$와 $m_2=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 중 작은 값이 된다.

한편 $m_1-m_2=\sqrt{3}-\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$이고,

$\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}+\sqrt{\dfrac{9}{4}}=3=(\sqrt{3})^2$이다.

그러므로 $m_1>m_2$이다. 따라서 $m=m_2=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

10점