문항 2

출제의도 및 평가기준

01. 출제의도

본 문제는 연속확률변수와 확률밀도함수의 의미를 이해하고 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 확률을 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 적분과 미분의 관계를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다.

[논제 1] 확률밀도함수의 의미를 이해하고 주어진 함수가 확률밀도함수가 되기 위한 조건을 활용할 수 있는지를 평가하는 문제다. 또한 연속확률변수의 확률을 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

[논제 2] 연속확률변수의 확률을 확률밀도함수를 이용하여 구할 수 있는지를 평가하는 문제다. 또한 넓이로 주어지는 확률을 정적분을 이용하여 구할 수 있는지를 평가하고자 한다. 또한 적분과 미분의 관계를 이해하고 이를 통해 함수 값을 구할 수 있는지를 평가하는 문제다.

02. 평가기준

[논제 1] (15점)

$f(x)=kx^3 \quad (1 \le x \le 2)$가 확률밀도함수이므로 제시문 (ㄱ)의 성질로부터 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이다. 이 도형의 넓이는 정적분 $\int_1^2 kx^3dx$와 같으므로 $$\int_1^2 kx^3dx=\frac{k}{4}(2^4-1^4)=\frac{15}{4}k=1$$ 이다. 따라서 $k=\frac{4}{15}$이다.	5점
한편 $Y=X^2$이므로 $\mathrm{P}(1 \le Y \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X^2 \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})$이고, 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})$은 함수 $y=\frac{4}{15}x^3$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\quad x=\sqrt{2}$와 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{4}{15}x^3dx=\frac{1}{5}$이다. 따라서 $$\mathrm{P}(1 \le Y \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X^2 \le 2)=\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{2})=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{4}{15}x^3dx=\frac{1}{5}$$ 이다.	10점

[논제 2] (15점)

제시문 (ㄷ)에 의해 $1 \le b \le 4$인 b에 대하여 $$\int_1^b g(y)dy = \mathrm{P}(1 \le Y \le b)$$ 이다. 그런데 $\mathrm{P}(1 \le Y \le b) = \mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{b})$이고 확률 $\mathrm{P}(1 \le X \le \sqrt{b})$은 함수 $y = \frac{4}{15}x^3$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1,\ x=\sqrt{b}$와 둘러싸인 도형의 넓이이므로 $\int_1^{\sqrt{b}} \frac{4}{15}x^3 dx = \frac{1}{15}(b^2-1)$이다. 즉, $\int_1^b g(y)dy = \frac{1}{15}(b^2-1)$이다. 따라서 $1 \le x \le 4$인 x에 대하여 $\int_1^x g(y)dy = \frac{1}{15}(x^2-1)$이다. 그런데 함수 $g(y)$가 구간 [1, 4]에서 연속이므로 제시문 (ㄹ)에 의해 $1 < x < 4$인 x에 대하여 $$g(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x g(y)dy$$ 이다.	10점
그러므로 $1 < x < 4$인 x에 대하여 $$g(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x g(y)dy = \frac{d}{dx}\frac{1}{15}(x^2-1) = \frac{2}{15}x$$ 이다. 따라서 $g(3) = \frac{2}{5}$이다.	5점