

3. 자연과학, 공학계열, 간호학과(자연) 논술전형 문제

문항

1

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (20점)

수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 이 첫째항 a_1 부터 차례대로 일정한 수 d 를 더하여 얻은 수열일 때, 즉 $a_{n+1} = a_n + d$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 일 때, 이 수열 $\{a_n\}$ 을 등차수열이라고 하고, 일정한 수 d 를 이 수열의 공차라고 한다.

수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 이 첫째항 a_1 부터 차례대로 일정한 수 r 를 곱하여 얻은 수열일 때, 즉 $a_{n+1} = a_n r$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 일 때, 이 수열 $\{a_n\}$ 을 등비수열이라고 하고, 일정한 수 r 를 이 수열의 공비라고 한다.

각 항이 양의 실수인 등비수열 $\{p_n\}$ 은 실수 c 에 대하여 다음 식을 만족한다.

$$p_{2017} = p_1^2 - c$$

[문제 1] (10점) 어떤 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이면서 동시에 등비수열일 때, 이 수열 $\{a_n\}$ 은 어떤 수열인지 논술하십시오.

[문제 2] (10점) 제시문 (ㄷ)의 수열 $\{p_n\}$ 에 대하여 $\{\log p_n\}$ 이 등비수열일 때, 가능한 모든 c 값의 집합을 구하고 그 근거를 논술하십시오.

문항 1의 출제의도 및 해설, 평가기준

01 출제의도

- 가) 등차수열, 등비수열의 뜻을 이해하는지 확인한다.
 나) 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하는지 확인한다.

02 문항해설

- 등차수열, 등비수열의 뜻을 이해하고 이를 통해 어떤 수열이 등차수열이면서 동시에 등비수열이 되는가를 논리적으로 이끌어낼 수 있는지를 평가한다.
- 로그의 성질로부터 등비수열의 로그가 등차수열이 되는지를 이해하고, 등차수열이면서 동시에 등비수열이 되는 조건을 문제에서 주어진 상황에 적용할 수 있는지, 이차방정식이 실근을 갖는 조건을 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계로 해석할 수 있는지 등을 평가한다.

03 평가기준

[문제 1] 10점

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이면서 동시에 등비수열이라고 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 처음 세 항 a_1, a_2, a_3 는 $a_2 - d, a_2, a_2 + d$ 라고 쓸 수 있다.	4점
또한 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이므로 $a_2^2 = a_1 a_3$ 이다. 따라서 $a_2^2 = a_1 a_3 = (a_2 - d)(a_2 + d) = a_2^2 - d^2$ 이다. 그러므로 $d = 0$ 이 된다.	4점
즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = a_1$ 이 성립하는 수열이다.	2점

[문제 2] 10점

수열 $\{p_n\}$ 은 등비수열이므로 $p_n = p_1 r^{n-1}$ 이라고 쓸 수 있다. 그러면 $\log p_n = \log p_1 + (n-1)\log r$ 이므로 수열 $\{\log p_n\}$ 은 등차수열이다. 논제의 조건으로부터 수열 $\{\log p_n\}$ 이 등비수열이므로 논제1의 결과에 의해 수열 $\{\log p_n\}$ 의 모든 항은 $\log p_1$ 과 같다. 즉, 수열 $\{p_n\}$ 의 모든 항은 p_1 과 같다.	5점
따라서 $p_1 = p_1^2 - c$ 가 성립한다. 즉, p_1 은 이차방정식 $x^2 - x = c$ 의 양의 실근이 된다. 그런데 이 이차방정식의 실근은 이차함수 $y = x^2 - x$ 의 그래프와 직선 $y = c$ 가 만나는 점의 x 좌표와 같으므로 이차 방정식 $x^2 - x = c$ 은 $c \geq -\frac{1}{4}$ 이면 양의 실근을 갖지만, $c < -\frac{1}{4}$ 일 때는 양의 실근을 갖지 않는다. 따라서 가능한 모든 c 값의 집합은 $\left\{c \mid c \geq -\frac{1}{4}\right\}$ 이다.	5점

제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하십시오. (40점)

실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 4ax + a^2 - b$$

자연수 n 과 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 두 조건을 동시에 만족하는 좌표 평면 위의 점 (a, b) 로 이루어진 영역의 넓이를 A_n 이라고 하자.

- i) $-\sqrt{n} \leq a \leq \sqrt{n}$
- ii) 방정식 $f(x) = 0$ 은 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

[함수의 증가와 감소의 판정]

함수 $g(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x 에 대하여

- i) $g'(x) > 0$ 이면 $g(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.
- ii) $g'(x) < 0$ 이면 $g(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

[사이값 정리]

함수 $h(x)$ 가 닫힌 구간 $[c, d]$ 에서 연속이고, $h(c) \neq h(d)$ 이면, $h(c)$ 와 $h(d)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $h(e) = k$ 인 e 가 열린 구간 (c, d) 에 적어도 하나 존재한다.

[문제 1] (20점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 는 $a = 0$ 일 때 상수함수이다. $a \neq 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 조사하고 그 근거를 논술하십시오.

[문제 2] (20점) 제시문 (ㄴ)의 A_n 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n+1}$ 의 수렴, 발산을 조사하고 그 근거를 논술하십시오.

문항 2의 출제의도 및 해설, 평가기준

01 출제의도

- 가) 미분법을 활용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이해하고 판정할 수 있는지 확인한다.
- 나) 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
- 다) 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 확인한다.
- 라) 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있는지 확인한다.

02 문항해설

- 미분, 적분법은 속도, 가속도, 넓이, 부피와 같은 물리량을 측정하는 데 있어서 가장 핵심적인 도구로, 건축, 토목 그리고 첨단 과학에 이르기까지 광범위한 분야에서 널리 활용된다. 본 문항의 핵심적인 내용은 수학 I, II 그리고 미적분 I에서 다루어진다. 따라서 본 문항을 통해 학생들이 제시문을 읽고 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 이해하고 판정할 수 있는지, 연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지, 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지, 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고 이를 판별할 수 있는지, 풀이를 논리적으로 전개할 수 있는지를 평가한다.

03 평가기준

[문제 1] 20점

제시문 (가)에서 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면 다음과 같다. $f'(x) = 3ax^2 - 6ax + 4a$	4점
도함수를 정리하면 다음과 같다. $f'(x) = 3a\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{3}\right)$ $= 3a\left((x-1)^2 + \frac{1}{3}\right)$	6점
i) $a > 0$ 일 때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 제시문 (나)에서 주어진 함수의 증가와 감소의 판정에 의해 함수 $f(x)$ 는 실수 전체에서 증가한다.	5점
ii) $a < 0$ 일 때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이므로 제시문 (나)에서 주어진 함수의 증가와 감소의 판정에 의해 함수 $f(x)$ 는 실수 전체에서 감소한다.	5점

[문제 2] 20점

<p>i) $a = 0$인 경우, 제시문 (ㄱ)에서 주어진 함수는 $f(x) = -b$가 되어 방정식 $f(x) = 0$이 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위해서는 $b = 0$이어야 한다. 따라서 $(a, b) = (0, 0)$이다.</p>	3점
<p>ii) $a \neq 0$인 경우. 문제 1)에 의해서, 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 증가($a > 0$) 하거나, 감소($a < 0$) 한다. 따라서 방정식 $f(x) = 0$은 실수 전체에서 많아야 하나의 실근을 갖는다. 방정식 $f(x) = 0$이 구간 $[0, 1]$에서 하나의 실근을 갖기 위해서는 $f(0) = 0$ 또는 $f(1) = 0$ 또는, 제시문 (ㄷ)의 사이값 정리에 의해서, 다음의 식을 만족하여야 한다.</p> $f(0)f(1) = (a^2 - b)(a^2 + 2a - b) < 0$ <p>즉,</p> $\begin{cases} a^2 - b \geq 0 \\ a^2 + 2a - b \leq 0 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} a^2 - b \leq 0 \\ a^2 + 2a - b \geq 0 \end{cases}$ <p>를 만족하여야 한다.</p>	7점
<p>i), ii) 와 제시문 (ㄴ)의 조건 i)에 의해서, 제시문 (ㄴ)의 영역은 $b = a^2 + 2a$, $b = a^2$, $a = \pm \sqrt{n}$으로 둘러싸인 영역이다. 넓이 A_n는</p> $A_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (a^2 + 2a) - a^2 da = 4 \int_0^{\sqrt{n}} a da = 2n \text{ 이다.}$	5점
<p>위의 A_n으로부터,</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1} \text{ 이다.}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \neq 0 \text{ 이므로 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n+1} \text{ 은 발산한다.}$	5점

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(문제 1, 문제 2)에 답하시오. (40점)

좌표평면의 원점 위에 놓인 점 P 가 있다. 동전을 한 번 던질 때마다 앞면이 나오면 점 P 를 x 축의 방향으로 2만큼, 뒷면이 나오면 y 축의 방향으로 1만큼 움직인다. 동전을 20번 던졌을 때 점 P 의 좌표를 (i, j) 라고 하자.

[이항계수의 성질] 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n$$

자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

[문제 1] (20점) 제시문 (ㄱ)의 점 (i, j) 와 점 $(0, 10)$ 사이의 거리가 10보다 작을 확률을 구하고 그 근거를 논술하시오.

[문제 2] (20점) 제시문 (ㄱ)의 점 (i, j) 에 대하여 $(i+1)j$ 가 홀수가 될 확률을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 3의 출제의도 및 평가기준

01

출제의도

- 가) 수학적 확률의 의미와 확률의 기본 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지 확인한다.
 나) 이항정리를 이용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지 확인한다.

02

평가기준

[논제 1] 20점

<p>20번의 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 m이라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $(20 - m)$이다. 이 경우 점 P의 좌표는 $(2m, 20 - m)$이다.</p>	6점
<p>이 점과 점 $(0, 10)$ 사이의 거리의 제곱이 100보다 작으므로 $4m^2 + (10 - m)^2 < 100$ 이다. 이 부등식을 풀면 $5m^2 - 20m = 5m(m - 4) < 0$에서 m의 범위는 $0 < m < 4$ 이고, 조건을 만족하는 m의 값은 $m = 1, 2, 3$이다.</p>	6점
<p>이는 동전의 앞면이 각각 1, 2, 3번 나오는 경우이므로 총 경우의 수는 ${}_{20}C_1 + {}_{20}C_2 + {}_{20}C_3 = 20 + 190 + 1140 = 1350$ 가지이다.</p>	4점
<p>이항계수의 성질에 의하여 전체의 경우의 수는 ${}_{20}C_0 + {}_{20}C_1 + {}_{20}C_2 + \dots + {}_{20}C_{20} = 2^{20}$ 이므로 확률은 $\frac{1350}{2^{20}} \left(= \frac{675}{2^{19}} \right)$ 이다.</p>	4점

[문제 2] 20점

<p>20번의 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 m이라고 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $(20 - m)$이다. 이 경우 점 P의 좌표는 $(2m, 20 - m)$이다. $(i + 1)j = (2m + 1)(20 - m)$가 홀수가 되기 위해서는 $(20 - m)$이 홀수이면 된다. 따라서 $m = 1, 3, \dots, 19$이다.</p>	10점
<p>즉, 앞면이 1, 3, 5, \dots, 19번 나오는 경우이고 앞면이 m번 나오는 경우의 수는 ${}_{20}C_m$이므로 총 경우의 수는 ${}_{20}C_1 + {}_{20}C_3 + \dots + {}_{20}C_{19}$ 이 된다.</p>	5점
<p>제시문 (ㄷ)에 의하여 ${}_{20}C_1 + {}_{20}C_3 + \dots + {}_{20}C_{19} = {}_{20}C_0 + {}_{20}C_2 + \dots + {}_{20}C_{20}$ 이고 좌변과 우변을 더한 값은 2^{20}이므로, 좌변의 합은 ${}_{20}C_1 + {}_{20}C_3 + \dots + {}_{20}C_{19} = 2^{19}$ 이 된다. 따라서 확률은 $\frac{2^{19}}{2^{20}} = \frac{1}{2}$ 이다.</p>	5점