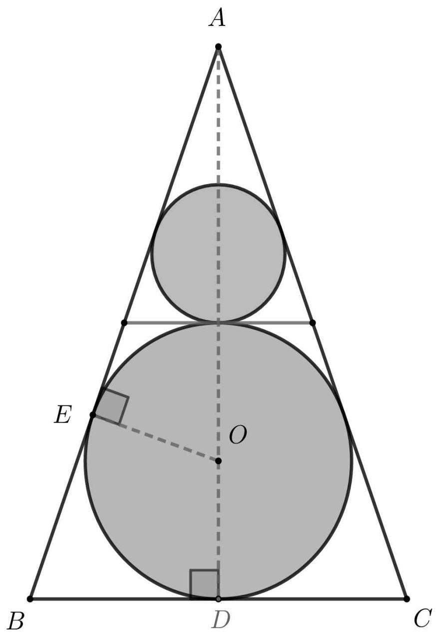
2019 모의 논술 풀이

[문제 1-1]

(1) n번째 삼각형의 높이를 h_n, n번째 원의 반지름을 r_n이라 하자. 주어진 정삼각형의 높이는 $h_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 정삼각형의 중심은 높이를 2:1로 내분하므로 첫 번째 원의 반지름은 $r_1 = \dfrac{h_1}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$이다. 같은 이유로 $h_2 = \dfrac{h_1}{3}$이고 $r_2 = \dfrac{h_2}{3}$이므로 $r_2 = \dfrac{r_1}{3}$이다. 같은 과정이 반복되므로 r_n은 공비가 $\dfrac{1}{3}$인 등비수열을 이루고, S_n은 공비가 $\dfrac{1}{9}$인 등비수열을 이룬다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} S_1 = \frac{3\pi}{32}.$$

(2) n번째 삼각형의 높이를 h_n, n번째 원의 반지름을 r_n이라 하자. 주어진 삼각형 ABC의 높이는 $h_1 = \sqrt{8}$이다.



첫 번째 원의 중심을 O, A에서 BC에 내린 수선의 발을 D, O에서 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자. 삼각형 AOE와 삼각형 ABD가 서로 닮은 사실을 이용하면 $h_1 - r_1 : r_1 = 3:1$이다. 따라서 $r_1 = \dfrac{h_1}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다. 이제 $h_2 = h_1 - 2r_1 = \dfrac{h_1}{2}$이므로 $r_2 = \dfrac{r_1}{2}$이다. 같은 방법을 반복하면, $h_n = h_{n-1} - 2r_{n-1} = 2r_{n-1}$이고 $r_n = \dfrac{h_n}{4} = \dfrac{r_{n-1}}{2}$이다. 그러므로 r_n은 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열임을 알 수 있고, $r_{100} = r_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{99} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{100}}$이다.

[문제 1-2]

(1) 원 C_1과 C_2의 중심 사이의 거리는 반지름의 합과 같으므로

$$\sqrt{(1-x_2)^2+(a-y_2)^2} = a+y_2$$

이다. 이 식을 제곱하여 $y_2 = ax_2^2$을 대입하면 $(1-x_2)^2 = 4a^2x_2^2$을 얻는다. 제곱근은 취하면 $1-x_2 = 2ax_2$이고, $x_2 = \frac{1}{2a+1}$이다.

(2) (1)의 풀이를 C_{n-1}과 C_n에 대하여 적용하면

$$\sqrt{(x_{n-1}-x_n)^2+(y_{n-1}-y_n)^2} = y_{n-1}+y_n$$

을 얻는다. 제곱하여 정리하면 $(x_{n-1}-x_n)^2 = 4a^2x_{n-1}^2x_n^2$이 되고 제곱근을 취하여 $x_{n-1}-x_n = 2ax_{n-1}x_n$을 얻는다. 양변을 $x_{n-1}x_n$으로 나누면

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}} = 2a$$

이다. 즉 $\frac{1}{x_n}$은 공차 $2a$인 등차수열이 된다. 그러므로

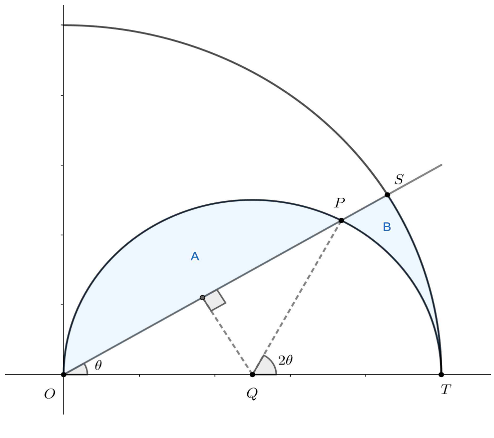
$$\frac{1}{x_{101}} = \frac{1}{x_1}+(101-1)2a = 1+200a.$$

즉, $x_{101} = \frac{1}{200a+1}$.

(3) C_n의 반지름은 $y_n = ax_n^2 = \frac{a}{(1+2a(n-1))^2}$이므로 $S_n = \frac{\pi a^2}{(1+2a(n-1))^4}$이다. 그러므로 구하는 극한은 $\frac{\pi}{16a^2}$이다.

[문제 2-1]

(1) 그림에서 직선 $y=(\tan\theta)x$와 반원이 만나는 점을 점 P, 반원의 중심 $(R/2,0)$을 점 Q라 하자. 선분 QP와 x축이 이루는 각은 2θ이다. 한편, 삼각형 OPQ는 이등변삼각형이고, 선분 OP의 길이의 절반은 $\frac{R}{2}\cos\theta$, 점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 길이는 $\frac{R}{2}\sin\theta$임을 확인할 수 있다.



따라서

A의 면적 = 호 QOP의 넓이 - 삼각형 OPQ의 넓이

$$= \frac{1}{2}\pi(\frac{R}{2})^2 - \theta(\frac{R}{2})^2 - \frac{R}{2}\cos\theta\frac{R}{2}\sin\theta$$

$$= \frac{R^2}{4}(\frac{\pi}{2} - \theta - \sin\theta\cos\theta) = \frac{R^2}{8}(\pi - 2\theta - \sin 2\theta).$$

직선 $y = (\tan\theta)x$가 원 $x^2 + y^2 = R^2$과 만나는 점을 S라 하면,

B의 면적 = 호 OST의 넓이 - 반원 QOT의 넓이 + A의 넓이

$$= \frac{1}{2}\theta R^2 - \frac{\pi}{8}R^2 + \frac{R^2}{8}(\pi - 2\theta - \sin 2\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\theta R^2 - \frac{R^2}{8}\sin 2\theta = \frac{R^2}{8}(2\theta - \sin 2\theta).$$

(2) $S(\theta) =$반지름 R인 반원의 넓이 - A의 넓이 - B의 넓이

$$= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{8}(\pi - 2\theta - \sin 2\theta) - \frac{R^2}{8}(2\theta - \sin 2\theta)$$

$$= R^2\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)$$

이다. 이를 미분하면 $S'(\theta) = \frac{R^2}{2}\cos 2\theta = 0$, 따라서 $\cos 2\theta = 0$이다. 즉, $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 극값이다. 한편, $S(0) < S(\frac{\pi}{4})$는 자명하므로, $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 최대가 된다.

[문제 2-2]

(1) $g(x)$가 $x = -R, 0, R$에서 근을 가지므로, $g(x) = kx(x-R)(x+R) = k(x^3 - R^2x)$가 된다. 따라서 $a = c = 0$이고 $b = -R^2$이다.

이제, $0 < x < R$에서 $g(x) < f(x)$가 되어야 하므로, $k^2x^2(x^2 - R^2)^2 < R^2 - x^2$을 만족해야 하고, 따라서 $k^2x^2(R^2 - x^2) < 1$, 즉 $k^2 < \frac{1}{x^2(R^2 - x^2)}$을 만족해야 한다.

한편, $\left(\frac{1}{x^2(R^2-x^2)}\right)' = \frac{2R^2x - 4x^3}{(x^2(R^2-x^2))^2}$이므로 $\frac{1}{x^2(R^2-x^2)}$는 $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$에서 최소값 $\frac{4}{R^4}$을 가진다. 따라서, $k^2 < (\frac{2}{R^2})^2$이다. $k < 0$이므로, 원하는 k의 범위는 $-\frac{2}{R^2} < k < 0$ 이다.

(2) $F = \frac{\pi R^2}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi R^2}{8}$ 이고, $G = k\int_0^R (x^3 - R^2x)dx = k\left(\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4\right) = -\frac{k}{4}R^4$ 이다.

$F = G$이므로 $\frac{\pi R^2}{8} = -\frac{k}{4}R^4$, 따라서 $k = -\frac{\pi}{2R^2}$이다.