2018년 모의논술고사

자연계열

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2018년 아주대학교 모의논술고사 자연계열

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 급수와 극한을 사용하여 다양한 도형의 넓이를 구할 수 있다. 주어진 삼각형에서 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 T_1이라 하자. 삼각형 T_1 위쪽에 있는 삼각형의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 T_2라 하자. 이를 반복하여, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 T_{n-1} 위쪽에 있는 삼각형의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 T_n이라 하면, [그림 1-1]과 같은 도형을 얻는다.

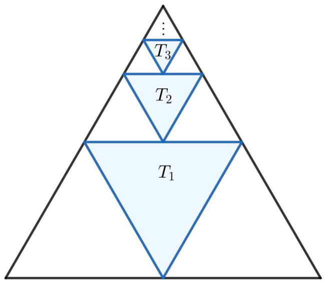


그림 1-1

각 단계에서 만들어지는 삼각형 $T_1, T_2, T_3, \ldots$은 서로 닮음이고, 삼각형 T_n의 한 변의 길이는 T_{n-1}의 대응하는 변의 길이의 절반이 된다. 따라서 삼각형 T_n의 넓이를 S_n이라고 하면 S_n은 공비 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{n-1} S_1 = \frac{4}{3} S_1$이 됨을 알 수 있다.

(나) [그림 1-2]와 같이 포물선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $(1, \frac{1}{2})$을 중심으로 하고, 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원 C_1을 생각하면 이 원은 x축과 접한다. 포물선 위의 점 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{1}{8}$인 원 C_2는 원 C_1과 한 점에서 만나고 x축과 접한다. 역시 포물선 위의 점 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{18})$을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{1}{18}$인 원 C_3는 역시 원 C_2와 한 점에서 만나고 x축과 접한다.

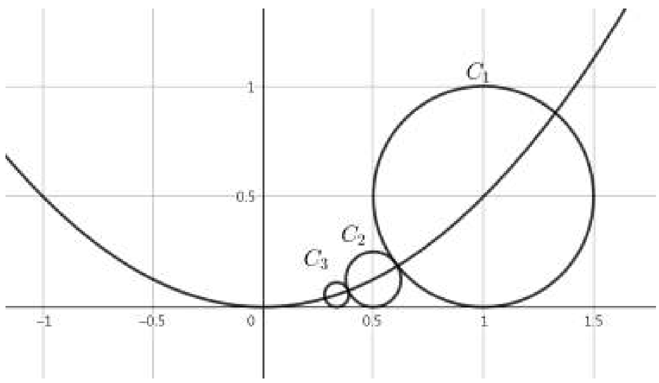


그림 1-2

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)와 [그림 1-3], [그림 1-4]를 참고하여 다음 논제에 답하라.

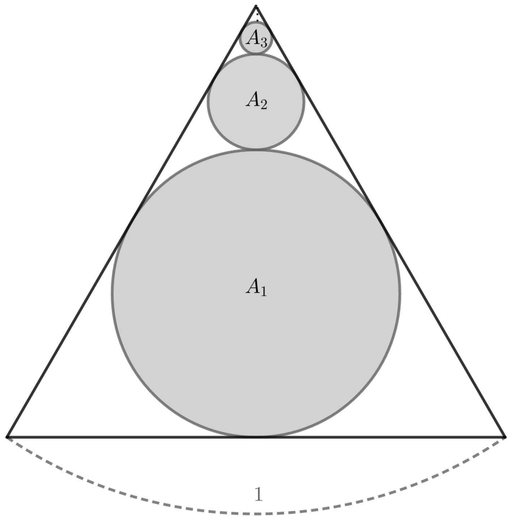


그림 1-3

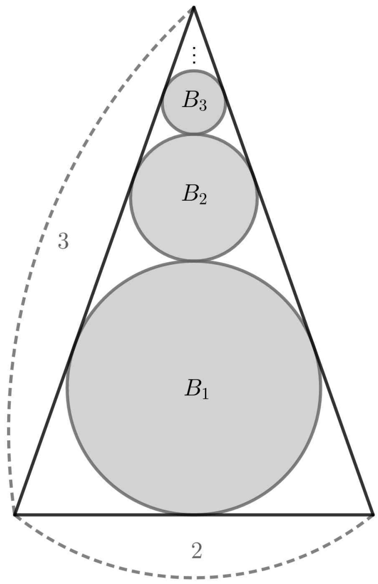


그림 1-4

(1) [그림 1-3]와 같이 변의 길이가 1인 정삼각형을 생각하고, 이 정삼각형에 내접하는 원을 A_1이라 하자. 삼각형의 두 빗변에 접하고 원 A_1과 한 점에서 만나는 원을 A_2라 하자. 이러한 과정을 반복하여 모든 자연수 n에 대하여 원 A_n을 얻을 수 있다. A_n의 넓이를 S_n이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하라.

(2) [그림 1-4]와 같이 두 빗변의 길이가 3이고 밑변의 길이가 2인 이등변삼각형을 생각하자. 문제 (1)과 같이 이등변삼각형에 내접하는 원을 B_1, 두 빗변에 접하고 B_1과 한 점에서 만나는 원을 B_2라 하고, 이러한 과정을 반복하여 원들을 계속해서 얻는다. 100번째 원 B_{100}의 반지름을 구하라.

[문제 1-2] (30점) 포물선 $y = ax^2$ (단, $a > 0$)이 있을 때 제시문 (나)와 같이 원들을 계속해서 그릴 수 있다. 포물선 $y = ax^2$ 위의 점 $(1, a)$를 중심으로 하고 x축에 접하는 원 C_1을 생각하자. 포물선 위의 점 $(x_{2,} y_2)$ (단, $0 < x_2 < 1$)를 중심으로 하고 x축에 접하며 C_1과 한 점에서 만나는 원을 C_2라 하자. 이와 같은 과정을 반복하여, 중심이 (x_{n-1}, y_{n-1})인 $n-1$번째 원 C_{n-1}을 얻었다고 하자. 그러면 포물선 위의 점 (x_n, y_n) (단, $0 < x_n < x_{n-1}$)을 중심으로 하고 x축에 접하며 C_{n-1}과 한 점에서 만나는 원 C_n을 계속하여 얻을 수 있다.

(1) 원 C_2의 중심의 x좌표 x_2를 구하라.

(2) 101번째 원 C_{101}의 중심의 x좌표 x_{101}을 구하라.

(3) 원 C_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} n^4 S_n$의 값을 구하라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 태극문양은 [그림 2-1]과 같이, 중심이 원점이고 반지름이 R인 원의 내부에 반지름이 $\frac{R}{2}$인 반원 두 개가 차례대로 엇갈려 그려진 모양이다.

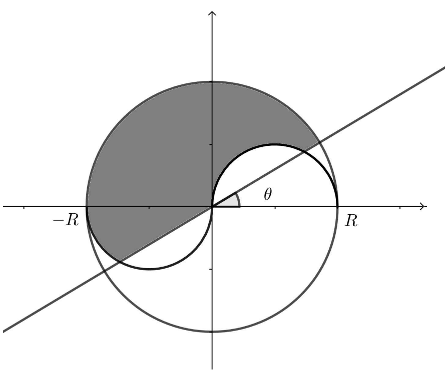


그림 2-1. 태극문양 그림

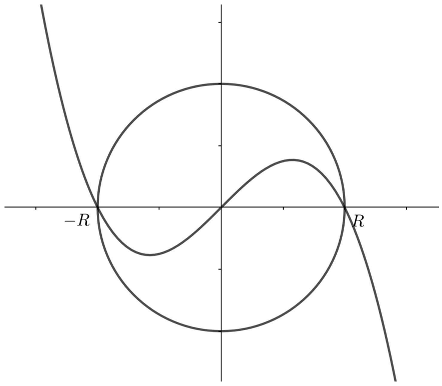


그림 2-2. 변형된 태극문양

함수 $f(x)$를 $-Rlex<0$일 때 $f(x)=-\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(x+\frac{R}{2}\right)^2}$이고, $0\le x\le R$일 때 $f(x)=\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(x-\frac{R}{2}\right)^2}$라고 정의하자. 그러면 태극문양에서 반지름이 $\frac{R}{2}$인 반원 두 개로 이루어진 곡선은 $f(x)$의 그래프로 생각할 수 있다.

이제 원점을 지나고 x축과 이루는 각이 θ (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)인 직선 $y=(\tan\theta)x$를 생각하여, 태극문양의 윗부분과 직선의 윗부분의 공통영역 ([그림 2-1]에서 색칠된 부분)의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. 즉, $S(\theta)$는, $-R\le x\le R$일 때 $y\le\sqrt{R^2-x^2}$, $y\ge f(x)$, $y\ge(\tan\theta)x$을 모두 만족하는 평면 영역의 넓이다.

(나) 제시문 (가)에서 주어진 태극문양을 결정하는 함수 $f(x)$를 삼차함수 $g(x)=k(x^3+ax^2+bx+c)$로 대체하여 [그림 2-2]와 같이 변형된 태극문양을 생각하자. 변형된 태극문양을 그리기 위해서는 $g(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족하여야 한다.

(a) $g(-R)=g(0)=g(R)=0$

(b) $-R<x<0$일 때 $g(x)<0$ 이고, $0<x<R$일 때 $g(x)>0$이다.

또한 함수 $g(x)$의 그래프가 [그림 2-3]과 같은 형태가 되면 큰 원 안에 그려지지 않으므로 다음 조건도 만족해야 한다.

(c) $-R<x<R$일 때, $g(x)$의 그래프는 원 $x^2+y^2=R^2$과 만나지 않는다.

조건 (a), (b), (c)를 모두 만족하는 함수 $g(x)$를 **변형된 태극문양 함수**라 부르자.

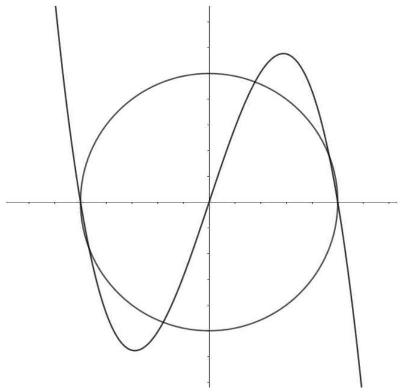
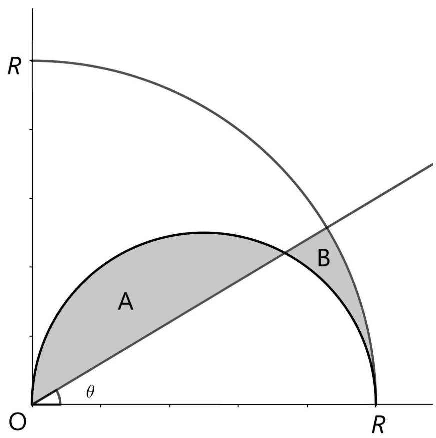


그림 2-3. 좋지 않은 예

[문제 2-1] (25점) 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하라.

(1) 다음 그림은 [그림 2-1]의 제1사분면 부분을 다시 그린 것이다. 색칠된 부분 A, B의 넓이를 각각 구하라.



(2) $S(\theta)$가 최대가 되는 θ의 값을 구하라.

[문제 2-2] (25점) 제시문 (가), (나)를 참고하여 다음 논제에 답하라.

(1) 삼차함수 $g(x)=k(x^3+ax^2+bx+c)$가 변형된 태극문양 함수가 되도록 하는 a, b, c의 값과 k의 범위를 구하라.

(2) 제시문 (가)의 함수 $f(x)$에 대하여 $0\le x\le R$일 때 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 F라 하자. 변형된 태극문양 함수 $g(x)=k(x^3+ax^2+bx+c)$에 대하여 $0\le x\le R$일 때 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 G라 하자. $F=G$가 성립할 때 k를 결정하라.