2019학년도 논술고사

자연계열 (오후, 의학과 제외) 모범답안

[문제 1-1]

(1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$이므로 $x=1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 그러므로 $A(1,5)$, $B(3,1)$이고, 따라서 중점의 좌표는 (2,3)이다.

(2) $y'' = 6x - 12 = 0$의 근은 $x=2$이므로 변곡점의 좌표는 (2,3)이다.

[문제 1-2]

(1) 방정식 $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$에서 $y - 3 = (x-2)^3 - 3(x-2)$이므로, x축으로 $K=-2$만큼 y축으로 $L=-3$만큼 평행이동하면 $y = x^3 - 3x$를 얻을 수 있다.
따라서 $B=-3$, $K=-2$, $L=-3$

(2) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$를 적절히 변형하면

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{b^3}{27a^2} \\ &= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} \end{aligned}$$

이므로, x축으로 $\frac{b}{3a}$, y축으로 $-d + \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2}$만큼 평행이동 하면 $y = ax^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x$를 얻을 수 있다.

따라서 $B = c - \frac{b^2}{3a}$, $K = \frac{b}{3a}$, $L = -d + \frac{bc}{3a} - \frac{2b^3}{27a^2}$이다.

[문제 1-3]

(1) 삼차곡선을 평행이동 하더라도 변곡점의 상대적 위치는 변하지 않으므로 [문제 1-2 (2)]에 의하여 삼차함수가 $f(x) = ax^3 + Bx$라고 가정해도 된다. 이때 $f(x)$의 변곡점은 I(0,0)이다. 따라서 변곡점을 지나는 직선의 방정식을 $y = kx$라고 할 수 있다.

방정식 $ax^3 + Bx = kx$를 풀면 $x = -\sqrt{\frac{k-B}{a}}$, $x=0$, $x = \sqrt{\frac{k-B}{a}}$이므로, P의 좌표는 $\left(-\sqrt{\frac{k-B}{a}}, -k\sqrt{\frac{k-B}{a}}\right)$, Q의 좌표는 $\left(\sqrt{\frac{k-B}{a}}, k\sqrt{\frac{k-B}{a}}\right)$이다. 따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점은 (0,0)이고 이는 I와 같다.

(2) 선분 $\overline{\mathrm{PI}}$와 곡선 $y = f(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 S, 선분 $\overline{\mathrm{IQ}}$와 곡선 $y = f(x)$로 둘러싸인 부분의 면적을 T라 하자. 그러면

$$S = \int_{-\sqrt{\frac{k-B}{a}}}^{0} (ax^3 + Bx - kx)dx, \quad T = \int_{0}^{\sqrt{\frac{k-B}{a}}} (kx - ax^3 - Bx)dx$$

이다. 한편 $S = \int_{-\sqrt{\frac{k-B}{a}}}^{0} (ax^3 + Bx - kx)dx$에서 $x = -t$로 치환하면, $\frac{dx}{dt} = -1$이므로

$$S = \int_{-\sqrt{\frac{k-B}{a}}}^{0} (ax^3 + Bx - kx)dx = \int_{0}^{\sqrt{\frac{k-B}{a}}} (at^3 + Bt - kt)dt = T$$

[문제 2-1]

(a) $\mathbb{B}$에서 m개의 점을 선택하여 각각 $\mathbb{A}$와 짝짓는 경우의 수이므로 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 따라서 전체 경우의 수는 ${}_n\mathrm{P}_m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1)$

(b) $\mathbb{B}$에서 m개의 점을 선택하면 교점이 생기지 않는 경우는 한 가지 경우 뿐 이다. 따라서 전체 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$이다.

[문제 2-2]

(1) 어느 세 선분도 한 점에서 만나지 않으므로 문제의 조건을 만족하는 짝짓기의 개수는 $\mathbb{B}$에서 4개를 선택하여 이웃한 두 점의 위치를 한 번 바꾸어 $\mathbb{A}$의 네 점과 차례대로 연결하는 개수와 같다. 각 4개의 점에서 이웃한 점을 선택하는 경우의 수는 3이므로 모두 $3 \times {}_8\mathrm{C}_4 = 210$가지.

(2) 등차수열의 공차를 d라 하자. 한 점에서 만나는 선분이 연결된 $\mathbb{A}$의 점들은 서로 인접해 있어야 한다. 세 점 이상이 한 점에서 만난다고 했으므로 $\mathbb{A}$에서 인접한 $k(\geq 3)$개의 점을 먼저 선택하여 각 경우의 개수를 구하는 방법으로 경우의 수를 구할 수 있다. 이때 이 k개의 점과 연결된 $\mathbb{B}$의 점들은 같은 간격으로 구성되어야 한다.

$k=4$:

- $\ell=1$인 경우 : $\mathbb{B}$에서 간격이 1인 경우는 $\{B_1,\ldots,B_4\}$, … , $\{B_5,\ldots,B_8\}$로 모두 5개.
- $\ell=2$인 경우 : $\mathbb{B}$에서 간격이 2인 경우는 $\{B_1,B_3,B_5,B_7\}$, $\{B_2,B_4,B_6,B_8\}$로 모두 2개.
- $\ell \geq 3$인 경우 : $\mathbb{B}$에서 간격이 ℓ인 경우는 존재하지 않는다.

따라서 모두 7개.

$k=3$: $\mathbb{A}$에서 인접하게 3개를 선택하는 경우는 $\{A_1,A_2,A_3\}$와 $\{A_2,A_3,A_4\}$ 뿐이다.

먼저 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 경우를 생각하자. A_4와 연결되는 $\mathbb{B}$의 점이 있어야 하므로 $\{B_1, \ldots, B_7\}$에서 같은 간격이 되도록 3개의 점을 선택한다. 그리고 A_4와 연결되는 점을 하나 선택하면 된다.

- $\{B_1,B_2,B_3\}$일 때 A_4와 연결되는 점은 B_4에서 B_8까지에서 선택되어야 하므로 5가지
- 같은 방식으로 $\{B_2,B_3,B_4\}$부터 $\{B_5,B_6,B_7\}$에서의 경우의 수는 각각 4, 3, 2, 1가지
- $\{B_1,B_3,B_5\}$일 때 A_4와 연결되는 점은 B_6에서 B_8까지에서 선택되어야 하므로 3가지
- 같은 방식으로 $\{B_2,B_4,B_6\}$, $\{B_3,B_5,B_7\}$의 경우의 수는 각각 2, 1가지.
- $\{B_1,B_4,B_7\}$일 때 A_4와 연결될 수 있는 점은 B_8 뿐이므로 1가지

따라서 합의법칙에 의하여 모두 22가지 경우가 있다.

한편 $\{A_2,A_3,A_4\}$의 경우는 $\{A_1,A_2,A_3\}$ 경우와 대칭적이므로 역시 22가지 경우가 있다.

따라서 모두 44개.

위 두 경우를 종합하면 문제의 조건을 만족하는 짝짓기의 개수는 $7+44=51$(개)다.

[문제 2-3]

(1) 선분의 길이가 1이 되기 위해서는 $i=1,\ldots,5$에 대하여 A_i와 B_i가 연결되어야 한다.

선분 $\overline{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i}$을 포함한 짝짓기의 개수를 구해보면 모두 $4!$(개)로 일정하므로 따라서 길이가 1인 선분의 개수는 $5\times 4! = 120$(개)이다.

(2) 점의 좌표 및 등차수열의 일반항을 이용하여 $\mathbb{A}$와 $\mathbb{B}$의 점 사이의 거리를 구해보면 생길 수 있는 선분의 길이의 종류는 1, $\sqrt{1+d^2}$, $\sqrt{1+4d^2}$, $\sqrt{1+9d^2}$, $\sqrt{1+16d^2}$ 이다.

(1)과 같은 방법으로 각 선분의 개수를 구해보면 다음과 같다.

- 선분의 길이가 1인 경우 : $5\times 4!$ (개)
- 선분의 길이가 $\sqrt{1+d^2}$ 인 경우 : $4\times 2\times 4!$
- 선분의 길이가 $\sqrt{1+4d^2}$ 인 경우 : $3\times 2\times 4!$
- 선분의 길이가 $\sqrt{1+9d^2}$ 인 경우 : $2\times 2\times 4!$
- 선분의 길이가 $\sqrt{1+16d^2}$ 인 경우 : $1\times 2\times 4!$

따라서 $L = 4!\times\left(5+8\sqrt{1+d^2}+6\sqrt{1+4d^2}+4\sqrt{1+9d^2}+2\sqrt{1+16d}\right)$이므로,

$$\lim_{d\to\infty}\frac{L}{d} = 4!\times\frac{\left(5+8\sqrt{1+d^2}+6\sqrt{1+4d^2}+4\sqrt{1+9d^2}+2\sqrt{1+16d}\right)}{d} = 960$$