2019학년도 논술고사

자연계열(오전) 모범답안

[문제 1-1]

(1)

$$800 = 12 \times 2^6 + 2^5$$

이므로 800은 2^6으로 나누면 나머지가 2^5이다. 따라서 번호가 800인 공은 6단계에서 색칠되고, 노란색이다.

(2) 각 단계마다 색칠되는 공의 수는 남아있는 흰색 공의 개수의 절반이므로, 흰색이 아닌 공의 개수는, 등비수열의 합의 공식을 이용하여,

$$2^{N-1} + 2^{N-2} + \cdots + 2 + 1 = \frac{2^N - 1}{2-1} = 2^N - 1$$

이다. 따라서 흰색 공의 개수는 $2^N - (2^N - 1) = 1$이다.

(3) $N = 20$이면 빨간색 공의 개수는 등비수열의 합의 공식을 이용하여 구할 수 있고,

$$2^{19} + 2^{17} + \cdots + 2^3 + 2 = \frac{2(4^{10} - 1)}{4-1} = \frac{2^{21} - 2}{3} = 699050$$

이다. 마찬가지로 $N = 21$이면 빨간색 공의 개수는

$$2^{20} + 2^{18} + \cdots + 2^2 + 1 = \frac{4^{11} - 1}{4-1} = \frac{2^{22} - 1}{3} = 1398101$$

이다.

[문제 1-2]

(1) 만약 N이 홀수이면 등비수열의 합의 공식을 사용하여

$$Y = 3^{N-1} + 2 \times 3^{N-2} + 3^{N-3} + 2 \times 3^{N-4} + \cdots + 3^2 + 2 \times 3 + 1$$

이다.

만약 N이 짝수이면등비수열의 합의 공식을 사용하여

$$Y = 3^{N-1} + 2 \times 3^{N-2} + 3^{N-3} + 2 \times 3^{N-4} + \cdots + 3 + 2 \times 1$$

이다.

(2) 위의 결과를 이용하여 $N = 2m+1$이 홀수이면

$$\begin{aligned} Y &= [3^{2m} + 3^{2m-2} + \cdots + 3 + 1] + 2 \times [3^{2m-1} + 3^{2m-3} + \cdots + 3] \\ &= \frac{9^{m+1} - 1}{9-1} + \frac{6(9^m - 1)}{9-1} = \frac{5 \times 3^N - 7}{8} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{Y(N)}{3^N} = \frac{5}{8} - \frac{7}{8 \times 3^N}$$

을 얻는다. $N = 2m$이 짝수이면

$$\begin{aligned} Y &= [3^{2m-1} + 3^{2m-3} + \cdots + 3] + 2 \times [3^{2m-2} + 3^{2m-4} + \cdots + 1] \\ &= \frac{3(9^m - 1)}{9-1} + \frac{2(9^m - 1)}{9-1} = \frac{5 \times 3^N - 5}{8} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{Y(N)}{3^N} = \frac{5}{8} - \frac{5}{8\times 3^N}$$

이다. 따라서 $\frac{Y(N)}{3^N}$의 극한값은 $\frac{5}{8}$이다.

[문제 2-1]

(1) S의 넓이는

$$\int_{\cos\theta}^{\cot\theta} \frac{1}{x^3}dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\cos\theta}^{\cot\theta} = -\frac{1}{2\cot^2\theta} + \frac{1}{2\cos^2\theta} = \frac{1}{2}(\sec^2\theta - \tan^2\theta)$$

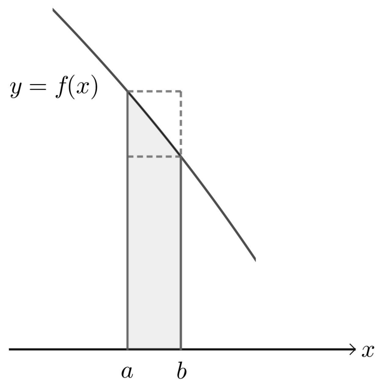
이다. 삼각함수 공식에 의해 이것은 $\frac{1}{2}$이므로 θ에 관계없이 일정하다.

(2) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로, S의 넓이는

$$\int_{1/2}^{1/\sqrt{3}} (1-x)e^{-x}dx = \left[-(1-x)e^{-x}\right]_{1/2}^{1/\sqrt{3}} - \int_{1/2}^{1/\sqrt{3}} e^{-x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2}e^{-1/2}$$

[문제 2-2]

(1) $f(x)$가 감소함수이므로 S의 넓이는 밑변의 길이를 L, 높이를 $f(a)$로 하는 사각형의 넓이보다 작고 밑변의 길이를 L, 높이를 $f(b)$로 하는 사각형의 넓이보다는 크다. 따라서 부등식 $(*)$가 성립한다.



(2) 도함수 $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = -\frac{x^2}{1+x} < 0$이므로, 구간 $(0,1)$에서 감소하는 함수이다.

(3) 문제 (2)로부터 $f(x) = 2 + x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$는 $(0,1]$에서 감소하는 함수이므로 제시문 (나)의 부등식 $(*)$가 성립하여

$$f(b) \le \frac{T}{L} \le f(a)$$

가 얻는다. $\theta \to \frac{\pi}{2}-$일 때 $a \to 0+$, $b \to 0+$가 성립하므로, 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (2 + x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)) = 2$$

이므로, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} = 2$이다.

[문제 2-3]

함수 $f(x)$가 연속이므로 최대·최소 정리에 의해서 구간 $[\cos\theta, \cot\theta]$에서 최댓값 M과 최솟값 m을 가진다. 따라서 S의 넓이를 생각하면

$$mL \leq T \leq ML,$$

또는

$$m \leq \frac{T}{L} \leq M$$

이 성립한다. 한편 $\theta \to \frac{\pi}{2}-$일 때 $x \to 0+$이므로 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} m = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} M = \lim_{x \to 0+} f(x) = f(0)$가 성립한다. 따라서 $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{T}{L} = f(0) = 2$ 이다.