2018 자연계열 모의논술 채점기준 및 모범답안

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

완전제곱을 이용하여 최솟값을 찾는 다음의 두 가지를 생각해보자.

(가) 공간상의 두 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$과 임의의 실수 k,l으로 다음과 같이 점 $P(u,v,w)$들을 생각한다.

$$(u,v,w)=k(1,0,0)+l(0,1,0). \qquad (1)$$

이때 임의의 점 $Q(x,y,z)$와 점 $P(u,v,w)$사이의 거리는 $\sqrt{(x-k)^2+(y-l)^2+(z-w)^2}$ 이며 $(x-k)^2+(y-l)^2+(z-w)^2$이 최소가 되도록 k, l을 선택할 때 그 거리는 가장 작은 값을 가지게 된다.

(나) 닫힌구간 $[-2,2]$에 정의된 함수 $f(x)$를 네 개의 작은 구간 $[-2,-1)$, $[-1,0)$, $[0,1)$, $[1,2]$ 위에서 적분한 값들을 각각 p,q,r,s라고 하자. 이 때 다음의 A를 최소로 만드는 실수 a,b를 구할 수 있다.

$$A=(p-(-a-b))^2+(q-(a-b))^2+(r-(a+b))^2+(s-(-a+b))^2.$$

[문제 1-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 공간상의 두 점 $A(1,-2,3)$, $B(1,-1,-1)$을 생각하자. 점 $Q(2,1,2)$와 벡터 $(u,v,w)=k(1,-2,3)+l(1,-1,-1)$을 이용하여 만든 점 $P(u,v,w)$사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k,l을 찾고 그 논거를 제시하시오.

(2) (10점) 공간상의 두 점 $A(1,-2,3)$, $B(1,-1,-1)$을 생각하자. 임의의 점 $Q(x,y,z)$가 주어진 경우, 이 점과 벡터 $(u,v,w)=k(1,-2,3)+l(1,-1,-1)$을 이용하여 만든 점 $P(u,v,w)$사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k,l을 찾고 그 논거를 제시하시오.

■ 채점 기준

(1), (2) 모두

거리 제곱식의 전개 **(5점)**

완전제곱식을 만든 후에 k,l찾기 **(5점)**

- (1), (2) 모두 전개 후 완전제곱식을 만들 때 처음 두 항을 제외하고 쓰지 않아도 감점 없음 - 공간벡터(점과 평면상의 거리)를 사용하여 푼 경우에도 k,l을 제대로 찾으면 만점
- 완전제곱식을 만드는 계산 실수에도 아이디어가 맞으면 8점

■ 모범 답안

(1) 점 Q와 점 P사이 거리의 제곱은 $(2-k-l)^2+(1+2k+l)^2+(2-3k+l)^2$이다.
이를 전개하면 $14k^2-12k+3l^2+2l+9$ 이며 완전 제곱식으로 표현하면

$$14\left(k-\frac{3}{7}\right)^2+3\left(l+\frac{1}{3}\right)^2-14\times\frac{9}{49}-3\times\frac{1}{9}+9$$

이 된다. 그러므로 $k=\frac{3}{7}$, $l=-\frac{1}{3}$이 거리제곱을, 따라서 거리를 최소가 되게 한다.

(2) 점 Q와 점 P사이 거리의 제곱은 $(x-k-l)^2+(y+2k+l)^2+(z-3k+l)^2$이다.
이를 전개하면 $14k^2+(-2x+4y-6z)k+3l^2+(-2x+2y+2z)l+x^2+y^2+z^2$ 이며 완전 제곱식으로 표현하면

$$14\left(k+\frac{-x+2y-3z}{14}\right)^2+3\left(l+\frac{-x+y+z}{3}\right)^2-14\times\left(\frac{-x+2y-3z}{14}\right)^2-3\left(\frac{-x+y+z}{3}\right)^2$$
$$+x^2+y^2+z^2$$

이 된다. 그러므로 $k=\frac{x-2y+3z}{14}$, $l=\frac{x-y-z}{3}$가 거리제곱을, 따라서 거리를 최소가 되게 한다.

[문제 1-2] 제시문 (나)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) **(10점)** 닫힌 구간 $[-2,2]$에 정의된 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 A값이 최소가 되는 실수 a,b를 p,q,r,s를 이용하여 표현하고 그 논거를 제시하시오.

(2) **(10점)** (1)에서 구한 a,b가 각각 $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)g(x)dx$, $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)h(x)dx$로 표현되도록 함수 $g(x)$, $h(x)$를 찾고, $\int_{-2}^{2}(g(x))^2dx$, $\int_{-2}^{2}(h(x))^2dx$, $\int_{-2}^{2}g(x)h(x)dx$의 적분값들을 구하시오.

(3) **(10점)** $0\le p\le 1$를 만족하는 p에 대하여 함수 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$를 생각하자. 이 함수의 A값이 최소가 되는 a,b를 $p(0\le p\le 1)$에 관한 함수로 표현하시오.

■ 채점 기준

(1) A식을 전개 후 a,b에 관한 내림차순으로 정리 **(5점)**
전개된 식을 완전제곱식으로 만든 후에 a,b 찾기 **(5점)**

(2) a, b를 $f(x)$의 구간 별 적분을 이용하여 표현한 후에 $g(x)$, $h(x)$를 찾기 **(7점)**
- a,b를 풀이처럼 $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx, \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)h(x)dx$ 형태로 나타내는데 3점
- $g(x)$,$h(x)$를 명확히 구하는데 각 2점

질문의 세 적분값들 구하기 **(3점: 각 1점씩)**

(3) (2)번에서 구한 함수 $g(x)$, $h(x)$를 이용하여 a, b값을 적분 계산으로 구한다. 이 때 코사인 함수의 합의 공식, 그리고 우함수/기함수 성질을 이용하면 계산을 많이 간단히 할 수 있다.
이렇게 합쳐서 계산할 경우
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$을 코사인 덧셈공식을 사용하여 분리하여 계산할 수 있음을 보이면 2점
- $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 각각에 대해 a,b 각 2점씩 총 8점

어떻게 계산하더라도 a, b 각각의 값을 정확하게 계산하면 각 5점씩 부여 **(10점)**

■ 모범 답안

(1) 제시문 (나)의 A식을 전개하면

$$4a^2+4b^2-2(-p+q+r-s)a-2(-p-q+r+s)b+p^2+q^2+r^2+s^2$$

이 되며 이를 완전제곱식으로 표현하면

$$4\left(a-\frac{-p+q+r-s}{4}\right)^2+4\left(b-\frac{-p-q+r+s}{4}\right)^2-4\times\left(\frac{-p+q+r-s}{4}\right)^2-4\times\left(\frac{-p-q+r+s}{4}\right)^2$$
$$+p^2+q^2+r^2+s^2$$

이 된다. 그러므로 $a=\frac{-p+q+r-s}{4}$, $b=\frac{-p-q+r+s}{4}$가 A를 최소로 만들어 준다.

(2) 제시문 (나)에 주어진 것처럼 p, q, r, s는 함수 $f(x)$를 네 개의 작은 구간 $[-2,-1)$, $[-1,0)$, $[0,1)$, $[1,2]$ 위에서 적분한 값들이기 때문에 (1)에서 구한 a,b는 다음과 같이 표현된다.

$$a=\frac{-p+q+r-s}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x)\,dx-\frac{1}{4}\int_{1}^{2}f(x)\,dx,$$

$$b=\frac{-p-q+r+s}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}\int_{-2}^{-1}f(x)\,dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_{1}^{2}f(x)\,dx.$$

그러므로 함수 $g(x), h(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<-1\\ 1, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ -1, & 1\le x\le 2\end{cases},\qquad h(x)=\begin{cases}-1, & -2\le x<-1\\ -1, & -1\le x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

과 같이 정의하면 $a=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)g(x)dx$, $b=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)h(x)dx$로 표현할 수 있다.

이 때 적분 $\int_{-2}^{2}(g(x))^2\,dx$, $\int_{-2}^{2}(h(x))^2\,dx$, $\int_{-2}^{2}g(x)h(x)dx$들의 값들은 각각 4, 4, 0이다.

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$는

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)\qquad(*)$$

과 같이 표현이 되기 때문에, 우선 함수들 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$에 대하여 A값이 최소가 되는 a,b를 구하자.

$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 인 경우 (2)에서 구한 함수 $g(x), h(x)$와 $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)$가 우함수이고, $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)$가 기함수라는 사실을 이용하면

$$a=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int_{0}^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx-\int_{1}^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right]$$
$$=\frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin 0-\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}2\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]=\frac{2}{\pi}$$

과

$$b=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx=0$$

를 얻는다.

또한 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 인 경우, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)$가 기함수이고, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)$가 우함수라는 사실 때문에

$$a=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)g(x)dx=0$$

과

$$\begin{aligned}b&=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx\\&=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\int_{0}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)h(x)dx\\&=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx+\int_{1}^{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx\right]\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos 0+\cos\left(\frac{\pi}{2}2\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

를 얻는다.

그러므로 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$의 경우, 식 (*)과 적분의 성질을 이용하여 우리는

$$a=\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right),\qquad b=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}p\right)$$

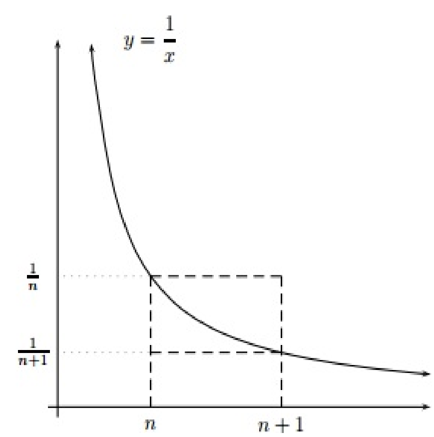
를 얻게 된다.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 합 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$을 증명하는 방법은 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) + (\frac{1}{9}+\cdots) + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}) + (\frac{1}{16}+\cdots) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

(나) 다음과 같은 그림을 참고하면 다양한 부등식을 구할 수 있다.



(다) 수학적 귀납법을 이용하면 부등식 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{k+j} > \frac{2j+2}{j+2k}$ 이 성립함을 알 수 있다. 단, k와 j는 자연수이다.

[문제 2-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (4점) 모든 자연수 k 에 대하여, $H_{2^k} \geq 1+\frac{k}{2}$ 임을 보이시오.

(2) (6점) 모든 자연수 k, m 에 대하여, $H_{m^k} \geq 1+k(\frac{m-1}{m})$ 임을 보이시오.

[문제 2-2] 제시문 (나)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n < \ln 2$ 임을 보이시오.

(2) **(10점)** 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln(n+1)+\dfrac{n}{2(n+1)} < H_n$ 임을 보이시오.

(힌트: 그림에서 사다리꼴을 생각한다.)

[문제 2-3] 제시문 (다)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) **(10점)** 합 $\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}+\cdots+\dfrac{1}{k+j}$ 가 1보다 크거나 같도록 하는 자연수 j를 자연수 k를 이용하여 나타내시오.

(2) **(10점)** (1)을 이용하여 자연수 n 에 대하여, $H_{\frac{3^n-1}{2}} \geq n$ 임을 보이시오.

[문제 2-1]

■ 채점 기준

(1) H_{2^k}를 $k+1$항으로 묶은 후 각 항을 제시문처럼 비교 **(2점)**

정리하여 최종 식 도출 **(2점)**

(2) H_{m^k}를 $k+1$항으로 묶음 **(3점)**

각 항을 $\dfrac{m^k-m^{k-1}}{m^k}$ 과 비교 **(3점)**

정리하여 최종 식 도출 **(1점)**

■ 모범 답안

(1) $H_{2^k} = 1+\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{2^3})+\cdots+(\dfrac{1}{2^{k-1}+1}\cdots+\dfrac{1}{2^k})$

$\geq 1+\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2})+(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^3})+\cdots+(\dfrac{1}{2^k}+\cdots+\dfrac{1}{2^k})$ --- 2점

$= 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^1}{2^2}+\dfrac{2^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{2^{k-1}}{2^k}$

$= 1+\dfrac{k}{2}$ --- 2점

(2) (1)과 마찬가지로

$$H_{m^k} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{m^k}\right) \text{ -- 3점}$$

$$> 1 + \left(\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m^k} + \cdots + \frac{1}{m^k}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{m-1}{m}\right) + \left(\frac{m^2-m}{m^2}\right) + \left(\frac{m^3-m^2}{m^3}\right) + \cdots + \left(\frac{m^k - m^{k-1}}{m^k}\right) \text{ ---2점}$$

$$= 1 + k \times \left(\frac{m-1}{m}\right) \text{ --- 1점}$$

[문제 2–2]

■ 채점 기준

(1) 부등식 $\int_n^{2n} \frac{dx}{x} > H_{2n} - H_n$ 의 증명 **(4점)**

부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n$ 의 증명 **(6점)**

(2) 사다리꼴 모양의 넓이와 $1/x$의 적분 비교 식 도출 **(3점)**
위 식의 합으로 $\ln(n+1)$의 상한을 사다리꼴의 넓이의 합으로 표현 **(3점)**
정리하여 최종 식 도출 **(4점)**

■ 모범 답안

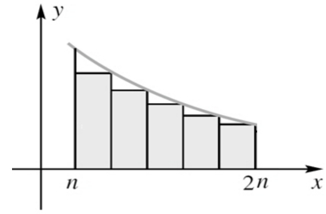
(1) 먼저 [그림1]로부터 $\int_n^{2n} \frac{dx}{x} > H_{2n} - H_n$ 이므로,

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = [\ln x]_n^{2n} = \ln(2n) - \ln n = \ln(2n/n) = \ln 2 \text{ 이다.} \qquad \text{--- 4점}$$

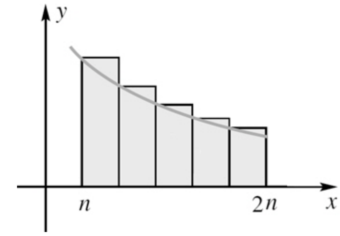
한편, [그림2]에서

$$H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n} = H_{2n-1} - H_{n-1} > \int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2 \text{ 이므로,}$$

$\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n$ 을 얻는다. --- 6점



[그림 1]



[그림 2]

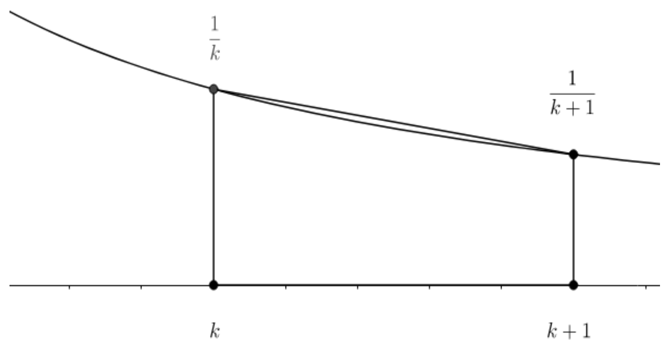
두 번째 부등식은 다음과 같이 해결할 수도 있다.

먼저, $H_{2n} - H_n > \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} = \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\frac{2n+1}{n+1}$ (2점)

이제 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n+1}{n+1}$를 증명하면 된다. 이 부등식은 $\frac{2n+2}{2n+1} < e^{\frac{1}{2n}}$ 과 동치이며 양변 제곱하면 $(\frac{2n+2}{2n+1})^2 < e^{\frac{1}{n}}$이 된다. 우리는 $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$ 임을 알고 있으므로 $(\frac{2n+2}{2n+1})^2 < 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}$ 을 증명하면 된다. (2점) 이는 다항식으로 비교하여 성립을 확인할 수 있다. (2점)

(2) 각 자연수 k에 대해 [그림3]처럼 사다리꼴을 생각하면

$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < (\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1})/2$ 이다. ---3점



[그림 3]

따라서

$$\sum_{l=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} < \sum_{l=1}^{n}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})/2 = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}) \text{ ---3점}$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+(\frac{1}{2})(-1+\frac{1}{n+1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{-n}{2(n+1)}$$

이제 $\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2n}{n+1}$ 이므로 $\ln(n+1) + \frac{n}{2(n+1)} < H_n$ 이 성립한다. -- 4점

[문제 2-3]

■ 채점 기준

(1) 제시문 (다)를 참고하여 j를 k를 사용하여 표현 **(10점)**
- $2k-2$보다 큰 값을 잡은 경우 제시문 (다)를 잘 사용한 경우 3점.

(2) 각 k에 대해 (1)에서 찾은 항까지의 합이 1보다 큼을 관찰 **(2점)**
합이 1보다 크게 하는 각 묶음의 항의 수 확인 **(2점)** 및 이 수가 등비수열임을 관찰 **(2점)**
정리하여 증명 마무리 **(4점)**

■ 모범 답안

(1) $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{k+j}>\frac{2j+2}{j+2k}$ 에서 $\frac{2j+2}{j+2k}\geq 1$인 j를 k로 나타내면
$2j+2 \geq j+2k$ 에서 $j \geq 2k-2$이다.

(2) 앞의 (1)에서 $j=2k-2$이 되도록 j를 잡아 나가면 항들의 그룹은 항상 1보다 크거나 같게 된다. --2점

항들의 그룹 $\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{k+(2k-2)}$ 에 속하는 항의 개수는 $2k-1$임을 참조하면 -- 2점

항의 개수를 1, $2\times2-1=3$, $2\times5-1=3^2$, $2\times14-1=3^3$, $\cdots$ 로 잡아나가 ---2점

$1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}=(3^n-1)(3-1)=(3^n-1)/2$까지 더하면 그 합은 n보다 크게 된다. 즉,

$$1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{13})+\cdots(\cdots+\frac{1}{(3^n-1)/2})=H_{(3^n-1)/2}\geq n$$

-- 4점

가 성립한다.