2018 자연계열 모의논술

[문항 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

완전제곱을 이용하여 최솟값을 찾는 다음의 두 가지를 생각해보자.

(가) 공간상의 두 점 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$과 임의의 실수 k,l으로 다음과 같이 점 $P(u,v,w)$들을 생각한다.

$$(u,v,w)=k(1,0,0)+l(0,1,0). \qquad (1)$$

이때 임의의 점 $Q(x,y,z)$와 점 $P(u,v,w)$사이의 거리는 $\sqrt{(x-k)^2+(y-l)^2+(z-w)^2}$ 이며 $(x-k)^2+(y-l)^2+(z-w)^2$이 최소가 되도록 k, l을 선택할 때 그 거리는 가장 작은 값을 가지게 된다.

(나) 닫힌구간 $[-2,2]$에 정의된 함수 $f(x)$를 네 개의 작은 구간 $[-2,-1)$, $[-1,0)$, $[0,1)$, $[1,2]$ 위에서 적분한 값들을 각각 p,q,r,s라고 하자. 이 때 다음의 A를 최소로 만드는 실수 a,b를 구할 수 있다.

$$A=(p-(-a-b))^2+(q-(a-b))^2+(r-(a+b))^2+(s-(-a+b))^2.$$

[문제 1-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) **(10점)** 공간상의 두 점 $A(1,-2,3)$, $B(1,-1,-1)$을 생각하자. 점 $Q(2,1,2)$와 벡터 $(u,v,w)=k(1,-2,3)+l(1,-1,-1)$을 이용하여 만든 점 $P(u,v,w)$사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k,l을 찾고 그 논거를 제시하시오.

(2) **(10점)** 공간상의 두 점 $A(1,-2,3)$, $B(1,-1,-1)$을 생각하자. 임의의 점 $Q(x,y,z)$가 주어진 경우, 이 점과 벡터 $(u,v,w)=k(1,-2,3)+l(1,-1,-1)$을 이용하여 만든 점 $P(u,v,w)$사이의 거리가 최소가 되도록 실수 k,l을 찾고 그 논거를 제시하시오.

[문제 1-2] 제시문 (나)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) **(10점)** 닫힌 구간 $[-2,2]$에 정의된 임의의 함수 $f(x)$에 대하여 A값이 최소가 되는 실수 a,b를 p,q,r,s를 이용하여 표현하고 그 논거를 제시하시오.

(2) (10점) (1)에서 구한 a,b가 각각 $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$, $\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)h(x)dx$로 표현되도록 함수 $g(x)$, $h(x)$를 찾고, $\int_{-2}^{2}(g(x))^2 dx$, $\int_{-2}^{2}(h(x))^2 dx$, $\int_{-2}^{2} g(x)h(x)dx$의 적분값들을 구하시오.

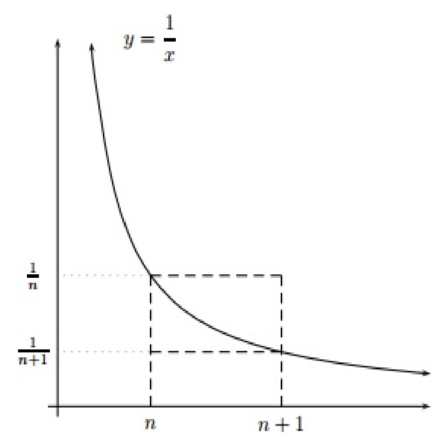
(3) (10점) $0 \le p \le 1$를 만족하는 p에 대하여 함수 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-p)\right)$를 생각하자. 이 함수의 A값이 최소가 되는 a,b를 $p(0 \le p \le 1)$에 관한 함수로 표현하시오.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 합 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$에 대하여 극한 $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$을 증명하는 방법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9}+\cdots\right) + \cdots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}+\cdots\right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots\end{aligned}$$

(나) 다음과 같은 그림을 참고하면 다양한 부등식을 구할 수 있다.



(다) 수학적 귀납법을 이용하면 부등식 $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{k+j} > \frac{2j+2}{j+2k}$ 이 성립함을 알 수 있다. 단, k와 j는 자연수이다.

[문제 2-1] 제시문 (가)를 참고하여 다음 논제에 답하시오.

(1) **(4점)** 모든 자연수 k 에 대하여, $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ 임을 보이시오.

(2) **(6점)** 모든 자연수 k, m 에 대하여, $H_{m^k} \geq 1 + k\left(\frac{m-1}{m}\right)$ 임을 보이시오.

[문제 2-2] 제시문 (나)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) **(10점)** 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln 2 - \frac{1}{2n} < H_{2n} - H_n < \ln 2$ 임을 보이시오.

(2) (10점) 모든 자연수 n 에 대하여, 부등식 $\ln(n+1) + \dfrac{n}{2(n+1)} < H_n$ 임을 보이시오.

(힌트: 그림에서 사다리꼴을 생각한다.)

[문제 2-3] 제시문 (다)를 참조하여 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) 합 $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1} + \cdots + \dfrac{1}{k+j}$ 가 1보다 크거나 같도록 하는 자연수 j를 자연수 k를 이용하여 나타내시오.

(2) (10점) (1)을 이용하여 자연수 n 에 대하여, $H_{\frac{3^n-1}{2}} \geq n$ 임을 보이시오.