2018학년도 논술고사

자연계열(오전)
모범답안

[문제 1-1] 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하시오.

(1) (5점) 모든 n에 대하여 $\int_0^1 f(x)dx = 1$임을 보이시오.

[풀이]

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= (n+1)(n+2)\int_0^1 (x^n - x^{n+1})dx \\ &= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 = 1\end{aligned}$$

(2) (10점) 2이상의 자연수 n에 대하여 $\int_0^1 |f''(x)|dx = (n+1)(n+2)a_n$이라고 할 때, a_n을 구하고, 제시문 (라)를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

[풀이]

$$\begin{aligned}f''(x) &= (n+1)(n+2)\,(x^n - x^{n+1})'' \\ &= (n+1)(n+2)\{n(n-1)x^{n-2} - (n+1)nx^{n-1}\} \\ &= (n+1)(n+2)nx^{n-2}\{n-1-(n+1)x\} = 0\end{aligned}$$

이 되는 $x \in (0,1)$는 $\frac{n-1}{n+1}$이고, $x < \frac{n-1}{n+1}$일 때 $f''(x)>0$, $x > \frac{n-1}{n+1}$일 때 $f''(x) < 0$이 된다. 따라서

$$\begin{aligned}a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 |f''(x)|dx &= \left\{-\int_{\frac{n-1}{n+1}}^1 f''(x)dx + \int_0^{\frac{n-1}{n+1}} f''(x)dx\right\}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \left\{-\,[f'(x)]_{\frac{n-1}{n+1}}^1 + [f'(x)]_0^{\frac{n-1}{n+1}}\right\}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= -\,[nx^{n-1}-(n+1)x^n]_{\frac{n-1}{n+1}}^1 + [nx^{n-1}-(n+1)x^n]_0^{\frac{n-1}{n+1}} \\ &= -(n-(n+1))+2\left\{n\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} - (n+1)\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right\} - 0 \\ &= 1 + 2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

이 된다. 이제 제시문 (라)를 $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{n+1}{n}$에 적용하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \frac{2}{e^2}$을 얻게 된다. 따라서 $(n+1)(n+2)a_n$은 n이 커짐에 따라 무한히 커지게 된다.

(3) (10점) 각각의 $r \in (0,1)$에 대하여, n이 한없이 커질 때 $\int_r^1 f(x)dx$의 값이 1에 수렴함을 보이시

오. (단, 1보다 큰 상수 b에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$ 이다.)

[풀이] 각 $r\in(0,1)$에 대하여

$$\begin{aligned}\int_r^1 f(x)dx &= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_r^1\\ &= (n+1)(n+2)\left\{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{n+1}r^{n+1}-\frac{1}{n+2}r^{n+2}\right)\right\}\\ &= 1-(n+2)r^{n+1}+(n+1)r^{n+2}\\ &= 1-(nr^n)r-2r^{n+1}+(nr^n)r^2+r^{n+2}\end{aligned}$$

이다. r은 1보다 작은 양수이므로 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이고, $r=\frac{1}{b}$로 나타내면 $b>1$이기 때문에

$\lim_{n\to\infty}nr^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n}=0$이 된다. (따라서 n이 커질수록 $\int_r^1 f(x)dx$는 1로 수렴하게 된다.)

[문제 1-2] 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하시오. 모든 실수에서 정의되고 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$ 인 함수 $f(x)$를 생각하자.

(1) (5점) 음이 아닌 실수에서 정의된 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\int_{-x}^{x}f(t)dt-2f(0)x$$

이다. $x>0$일 때 $h'(x)$를 구하시오.

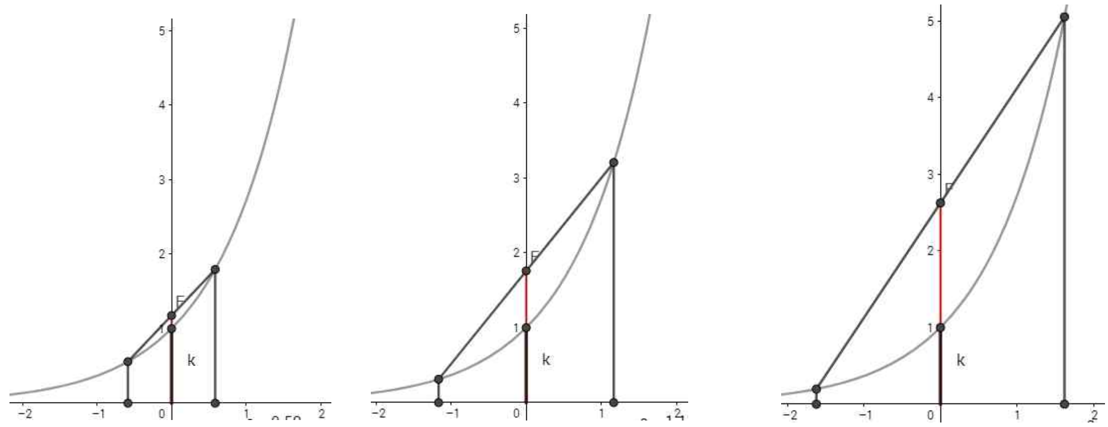
[풀이] 임의의 $x>0$에 대하여 $h(x)$를

$$h(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt-2f(0)x=\int_0^x f(t)dt-\int_0^{-x}f(t)dt-2f(0)x$$

로 볼 수 있기 때문에 $h'(x)=f(x)-f(-x)(-1)-2f(0)=f(x)+f(-x)-2f(0)$이 된다.

(2) (10점) $x>0$일 때 $h'(x)>0$임을 보이시오.

[풀이1] 제시문 (가)와 문제의 조건을 이용하면 $x=0$ 주위에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다고 할 수 있다. 따라서 그림을 이용하면 임의의 $x>0$에 대하여 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}>f(0)$을 얻게 된다.



이는 (1)의 풀이에 따라서 $h'(x)>0$을 의미한다.

[풀이2] 제시문 (다)를 이용하면 좀 더 엄밀하게 $h'(x)>0$을 보일 수 있다. 임의의 $x>0$에 대하여 $h'(x)=(f(x)-f(0))-(f(0)-f(-x))$로 표현하면, 제시문 (다)에 의하여 $-x<c_1$ $<0<c_2<x$를 만족하는 c_1,c_2가 존재하며

$$h'(x)=f'(c_2)(x-0)-f'(c_1)(0-(-x))=(f'(c_2)-f'(c_1))x$$

가 된다. 다시 한 번 제시문 (다)를 이용하면 $h'(x)=f''(c)(c_2-c_1)x$이 되는 c가 열린구간(c_1,c_2)안에 존재한다. 이 때 $f''(c)>0$, $c_2>c_1$, $x>0$이므로 $h'(x)>0$이 된다.

[풀이3] $h'(x)=f(x)+f(-x)-2f(0)$을 이용하면 모든 $x>0$에 대하여 $h''(x)=f'(x)-f'(-x)$ 이고, 모든 $x>0$에 대하여 $f''(x)>0$이란 조건은 $f'(x)$가 증가함수임을 의미하기 때문에, 모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)>f'(-x)$ 또는 $h''(x)>0$ 이다. 즉 $h'(x)$는 증가함수이며 모든 $0\le x_1<x_2$에 대하여 $h'(x_1)<h'(x_2)$이다. 이제 $h'(0)=0$라는 관찰을 이용하면 $x>0$일 때 $h'(x)>0$을 알 수 있다.

(3) (10점) (1), (2)와 제시문 (다)를 이용하여, 모든 $x>0$에 대하여

$$\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)dt > f(0)$$

이 성립함을 보이시오.

[풀이] (1)에 의하면 $h(0)=0$이다. 그리고 모든 $x>0$에 $h(x)=h(x)-h(0)=h'(c)(x-0)$을 만족하는 c가 제시문 (다)에 의하여 열린구간 $(0,x)$안에 존재하게 된다. 따라서 (2)의 결과에 의하여 $h(x)>0$을 볼 수 있고 이는 위의 부등식을 의미한다.

아래 문제들에서 n은 3이상의 자연수라고 하자.

[문제 2-1] (5점) n개의 자석들을 나열할 때, **타입1**의 개수가 j개인 나열방식의 개수를 구하시오.

[풀이] n개의 자석들의 타입 선택을 고려하면 모든 가능한 나열방식 수는 2^n개이다. 그 중 **타입1**인 자석이 j개 $(j=0,1,\cdots,n)$, **타입0**인 자석이 $n-j$개인 경우들은 n개의 나열된 방 중에서 j개의 방을 선택하는 방법 수와 일치하며 그 수는 ${}_n\mathrm{C}_j = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$이 된다.

[문제 2-2] (10점) n개의 자석들을 나열할 때, E의 값에 따른 나열방식의 개수 $w(E)$를 구하고 그 이유를 설명하시오.

[풀이] 우선 E가 가질 수 있는 값은 $0,1,\cdots,n-1$ 중 하나이다. 왼쪽 첫 자석이 **타입1**을 가질 경우, 주어진 E의 값에 대하여 같은 E값을 가시는 나열방식의 개수는, 제시문 (가)의 마지막 설명에 의하면 총 $n-1$개의 오른쪽 또는 위쪽의 이동 중에서 위쪽으로 정확히 E번 이동하는 경우들의 수이며 그 수는 $n-1$개의 나열된 방에서 E개의 방을 선택하는 방법 수와 일치하게 되어

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_E = \frac{(n-1)!}{E!(n-1-E)!} $$

과 같다. 또한 왼쪽 첫 자석이 **타입0**인 경우도 같은 결과가 됨을 관찰할 수 있기 때문에 $w(E) = 2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_E$가 된다.

[문제 2-3] n개의 자석들을 나열할 때, 각 자석을 **타입1**으로 선택할 확률이 p(단, $p \in (0,1)$), **타입0**으로 선택할 확률이 $q = 1-p$라고 하자. 자석의 타입을 선택하는 사건들은 서로 독립이라고 하자.

(1) (10점) $p = q = \dfrac{1}{2}$인 경우 E의 값이 k일 확률을 **[문제 2-2]**를 이용하여 구하고 이유를 설명하시오.

[풀이] k는 $0,1,\cdots,n-1$인 경우들만 생각하면 된다. $p=q=\dfrac{1}{2}$인 경우 n개의 자석들을 나열하는 방식 수 2^n개 모두 동일한 확률 $\dfrac{1}{2^n}$을 가지게 된다. 따라서 E의 값이 k가 될 확률은 $\dfrac{w(k)}{2^n} = \dfrac{2 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_k}{2^n} = \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_k}{2^{n-1}}$이다.

(2) (10점) 제시문 (나)에 따르면 (1)에서 구한 E의 확률분포는 n이 커지면 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다. 이 때 m,σ를 구하고 이유를 설명하시오.

[풀이] (1)의 결과에 의하면 E의 값이 k가 될 확률이 ${}_{n-1}C_k \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1-k}$, $k=0,1,\cdots,n-1$이기 때문에 확률변수 E는 이항분포 $\mathrm{B}(\mathrm{n}-1,\,0.5)$를 따름을 알 수 있다. 따라서 제시문 (나)에 의하여 n이 클수록 E의 분포는 $N(0.5(n-1), 0.25(n-1))$의 분포에 근사해간다. 그러므로 $m = 0.5(n-1) = \dfrac{1}{2}(n-1)$, $\sigma = \sqrt{0.25(n-1)} = \dfrac{\sqrt{n-1}}{2}$이다.

(3) (15점) $p \neq q$일 경우 E의 값이 1일 확률은 $\dfrac{2pq}{q-p} \cdot r$로 나타낼 수 있다. r을 p와 q에 관한 식으로 나타내시오.

[풀이] 왼쪽 첫 자석이 **타입1**이면서 E가 1인 경우의 나열방식들은

$$(1,0,0,\cdots,0,0),\ (1,1,0,\cdots,0,0),\ (1,1,1,0,\cdots,0,0),\ \cdots,\ (1,1,1,\cdots,1,0)$$

의 $n-1$가지이며 각각의 확률은 pq^{n-1}, $p^2q^{n-2},\cdots,p^{n-1}q$가 된다. 그러므로 그 합을 다음과 같이 등비수열의 합의 공식을 이용하여 정리할 수 있다.

$$q^n\left(\left(\frac{p}{q}\right)+\cdots+\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right)=q^n\frac{\frac{p}{q}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{p}{q}}=\frac{pq(q^{n-1}-p^{n-1})}{q-p}.$$

비슷하게 왼쪽 첫 자석이 **타입0**이면서 E가 1인 경우, 위의 경우에서 0과 1들의 역할이 바뀐

$$(0,1,1,\cdots,1,1),\ (0,0,1,\cdots,1,1),\ (0,0,0,1,\cdots,1,1),\ \cdots,\ (0,0,0,\cdots,0,1)$$

들이며 각각의 확률은 qp^{n-1}, $q^2p^{n-2},\cdots,q^{n-1}p$가 되어 그 합은 위에서 계산한 합과 같게 된다. 따라서 $r=q^{n-1}-p^{n-1}$이다.