



2017학년도 논술고사

자연계열(오후) 채점기준



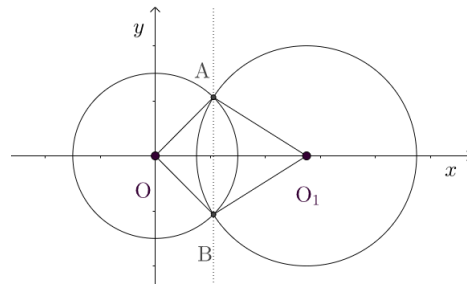
표지를 제외한 페이지 수 :10

로그인/회원가입 필요 없는 자료 제공 사이트 - 레전드스터디닷컴!

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

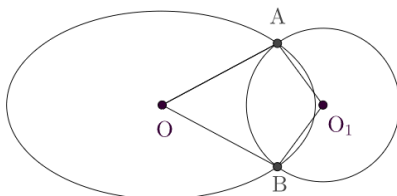
(가) 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 것은 그리스 시대 수학자들의 연구와 관련이 있다. 'Ellipse', 'Parabola', 'Hyperbola' 는 각각 그리스어 '모자라다', '적당하다', '초과하다'는 뜻을 가지고 있으며 원뿔의 단면과 밑면이 이루는 각과 모서리와 밑면이 이루는 각 사이의 관계와 관련이 있다. 이런 이차곡선은 산업현장에서 다양하게 사용되고 있으며 이차곡선들의 교점과 관련된 문제는 수학 이외의 분야에 자주 나타나고 있다.

(나) 원 $x^2 + y^2 = r_1^2$ 과 원 $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$ 이 그림과 같이 만나고 있다. (단, $r_1^2 + r_2^2 \leq d^2$)

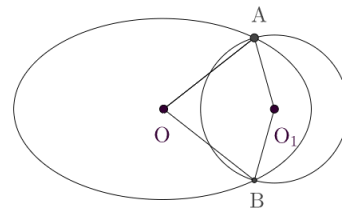


[그림 1]

(다) 타원과 원의 교점이 2개인 경우, [그림 2]처럼 교점 두 개와 원의 중심 O_1 을 잇는 두 선분(선분 AO_1 와 BO_1)이 각각 타원과 두 점에서 만나거나 [그림 3]처럼 교점 두 개와 점 O 를 잇는 두 선분(선분 AO 와 BO)이 각각 원과 두 점에서 만날 수도 있다.



[그림 2]



[그림 3]

[문제 1-1] 제시문 (나)에서 두 원의 교점을 A, B 라 하자.

(1) (8점) 점 A와 점 B의 좌표를 구하시오.

[풀이] 식 $x^2 + y^2 = r_1^2$ 와 식 $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$ 을 연립하면

$$y^2 = r_1^2 - x^2 = r_2^2 - (x-d)^2 \text{ 에서 } -2dx + d^2 = (x-d)^2 - x^2 = r_2^2 - r_1^2. \text{ 따라서}$$

$$x = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}. \text{ --- 4점}$$

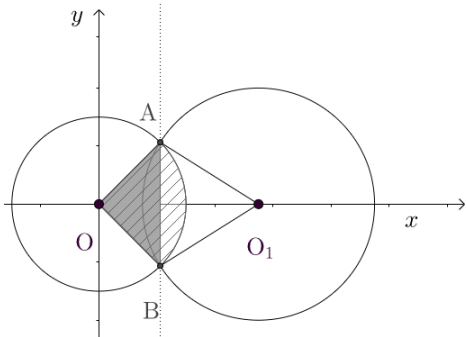
$$\text{이제 } y = \pm \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}\right)^2} \text{ --- 각 2점}$$

$$\text{또는 } = \pm \frac{\sqrt{2r_1^2 d^2 + 2r_1^2 r_2^2 + 2r_2^2 d^2 - r_1^4 - r_2^4 - d^4}}{2d} \text{ --- 각 2점}$$

$$\text{따라서 } A\left(\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}, \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}\right)^2}\right), B\left(\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}, -\sqrt{r_1^2 - \left(\frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}\right)^2}\right) \text{ 이다.}$$

(2) (8점) $\theta_1 = \angle AOB$, $\theta_2 = \angle AO_1B$ 라 할 때 두 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 θ_1 과 θ_2 로 나타내시오.

[풀이] 빗금친 부분의 넓이는 부채꼴 ABO의 넓이에서 삼각형 ABO의 넓이를 빼면 되므로



$$\frac{1}{2}r_1^2\theta_1 - \frac{1}{2}r_1^2\sin\theta_1 = \frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) \text{ --- 4점}$$

$$\text{비슷하게 반대쪽 부분의 넓이는 } \frac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2) \text{ --- 4점}$$

$$\text{따라서 구하는 넓이는 } \frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$$

또는 만약 $r_1^2 + r_2^2 = d^2$ 이면 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ 이므로 $\frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2^2(\pi - \theta_1 - \sin\theta_1)$ 등 다양한 답의 꼴이 나올 수 있다.

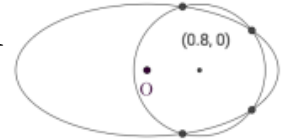
[문제 1-2] 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ ($d \geq 0$)의 교점의 개수를 d 에 따라 구하면 다음과 같다.

	$d = 0$	$0 < d < 1$	$d = 1$	$1 < d < 3$	$d = 3$	$d > 3$
교점의 개수	2	e	3	f	1	0
수학적 근거		(g)		(h)		

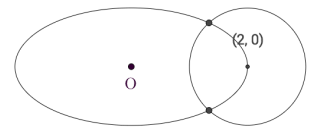
(1) (12점) 위 표에서 값 e 와 값 f 를 구하고, (g)와 (h)의 자리에 들어갈 수학적 근거를 제시하시오.

[풀이] 두 식 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ 을 연립하면 $\frac{x^2}{4} = 1 - y^2 = (x-d)^2$ 이므로 $\pm \frac{x}{2} = x-d$. 따라서 $x = 2d$ 일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$ 일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다.

$0 < d < 1$ 일 때 $x = 2d$ 와 $x = \frac{2}{3}d$ 둘 다 근이 될 수 있으므로 교점의 개수는 4 --- 4점 ($e = 4$ --- 2점)

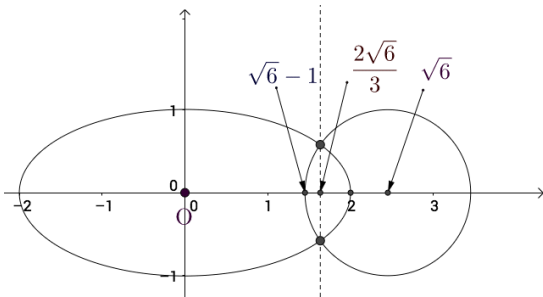


$1 < d < 3$ 일 때 $x = \frac{2}{3}d$ 만 근이 될 수 있고 교점의 개수는 2 --- 4점 ($f = 2$ --- 2점)



(2) (8점) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 원 $(x - \sqrt{6})^2 + y^2 = 1$ 에 의해 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분으로 표현하시오.

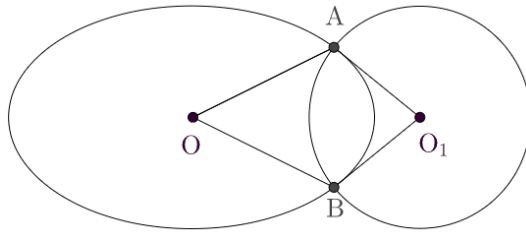
[풀이] 식 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 와 식 $(x - \sqrt{6})^2 + y^2 = 1$ 을 연립하면 두 점 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ --- 2점을 얻는다.



따라서 영역의 넓이는 $2 \int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$ --- 3점 (상한 각 1점, 피적분함수 1점)

$+ 2 \int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1 - (x - \sqrt{6})^2} dx$ --- 3점 (상한 각 1점, 피적분함수 1점)

[문제 1-3] (14점) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ ($d \geq 0$)이 있을 때, 제시문 (다)에서 나타나는 경우와는 다르게 사각형 OA_1B 가 '타원과 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역'을 포함하도록 하는 값 d 의 범위를 구하시오.



[풀이] 두 식 ① $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 ② $(x-d)^2 + y^2 = 1$ 을 연립하면 $\frac{x^2}{4} = 1 - y^2 = (x-d)^2$ 이므로 $\pm \frac{x}{2} = x-d$. 따라서 $x = 2d$ 일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$ 일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 이 교점이 될 수 있다. 그리고 교점이 2개인 경우는 $1 < d < 3$ --- 1점

일 때 이므로 A와 B의 x 좌표는 $\frac{2}{3}d$ --- 3점

(i) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 점 $P(\frac{2d}{3}, \sqrt{1-\frac{d^2}{9}})$ 에서의 접선식은 $\frac{2d}{3} \cdot \frac{x}{4} + \sqrt{1-\frac{d^2}{9}} \cdot y = 1$ 에서 $y = -\frac{d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}x + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$. --- 2점

이 식에서 $x = d$ 일 때 y 는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y = \frac{-d^2+6}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}} \leq 0$ --- 1점

따라서 $d \geq \sqrt{6}$ --- 1점

(ii) $(x-d)^2 + y^2 = 1$ 의 점 $P(\frac{2d}{3}, \sqrt{1-\frac{d^2}{9}})$ 에서의 접선식은 $(\frac{2}{3}d-d)(x-d) + \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}y = 1$ 에 서 $y = \frac{\frac{d}{3}(x-d)}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ --- 2점

이 식에서 $x = 0$ 일 때 y 는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y = \frac{-d^2+3}{3\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}} \leq 0$ --- 1점

따라서 $d \geq \sqrt{3}$ --- 1점

(i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6} \leq d < 3$. --- 2점

(참고) $d = \sqrt{6}$ 일 때 AO_1 은 타원의 접선이지만 AO 는 원의 접선이 아니다.

[별해] 기울기를 비교할 수도 있다.

두 식 ① $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 과 ② $(x-d)^2 + y^2 = 1$ 을 연립하면 $\frac{x^2}{4} = 1 - y^2 = (x-d)^2$ 이므로 $\pm \frac{x}{2} = x-d$. 따라서 $x = 2d$ 일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$ 일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 이 교점이 될 수 있다. 그리고 교점이 2개인 경우는 $1 < d < 3$ --- 1점



일 때 이므로 A와 B의 x 좌표는 $\frac{2}{3}d$ --- 3점

(i) 선분 OA의 기울기는 $\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}$ 이고 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의

$(x-d)^2 + y^2 = 1$ 의 접선의 기울기는 $\frac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ --- 2점

그림과 같이 나타나려면 $\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}} \leq \frac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ --- 1점

이제 $1 - \frac{d^2}{9} \leq \frac{2d^2}{9}$ 이므로 $d \geq \sqrt{3}$ --- 1점

(ii) 선분 O_1A 의 기울기는 $\frac{0 - \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{d - \frac{2d}{3}}$ 이고 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 의 접선의 기울기는 $\frac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ --- 2점

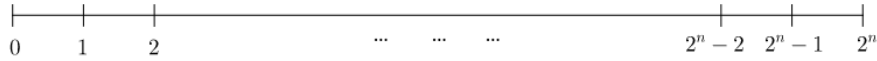
그림과 같이 나타나려면 $-\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{d}{3}} \geq \frac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ --- 1점

이제 $6(1 - \frac{d^2}{9}) \leq \frac{d^2}{3}$ 이므로 $d \geq \sqrt{6}$ --- 1점

(i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6} \leq d < 3$. --- 2점

[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 아래의 수직선 위의 구간 $[0,1], [1,2], \dots, [2^n - 1, 2^n]$ (n 은 자연수)위에 한 변의 길이 1인 2^n 개의 정사각형을 나누어 쌓으려고 한다.



쌓고 난 결과에 대하여 다음과 같이 D 를 정의할 수 있다.

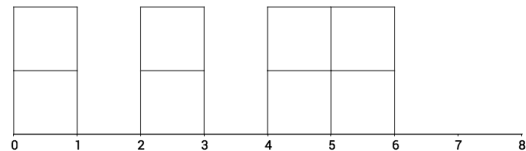
$$D = - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{x_k}{2^n} \log_2 \frac{x_k}{2^n}.$$

(단, x_k 는 구간 $[k-1, k]$ 에 쌓인 정사각형의 개수이고, $\frac{0}{2^n} \cdot \log_2 \frac{0}{2^n} = 0$ 으로 정의하자.) 이 때 $\frac{x_k}{2^n}$ 의 값은 음이 아닌 실수들이며 합이 1이다.

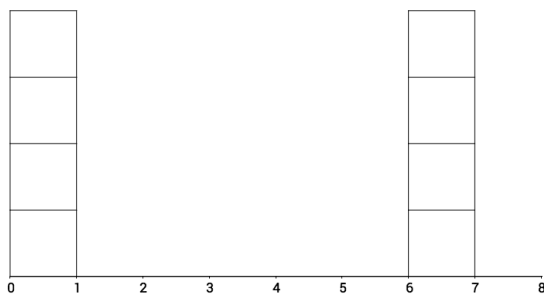
다음은 $n=3$ 일 때의 몇 가지 쌓은 결과들에 대한 D 의 값이다.



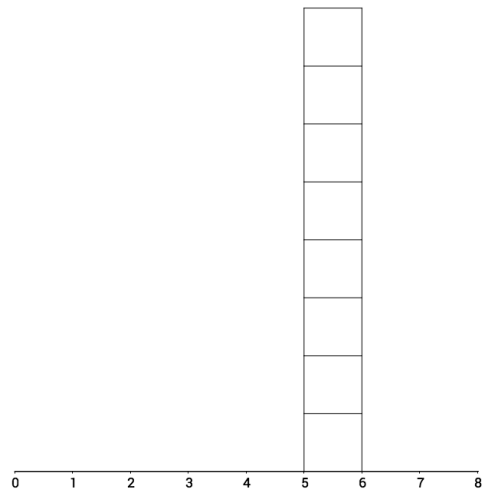
$D = 3$



$D = 2$



$D = 1$

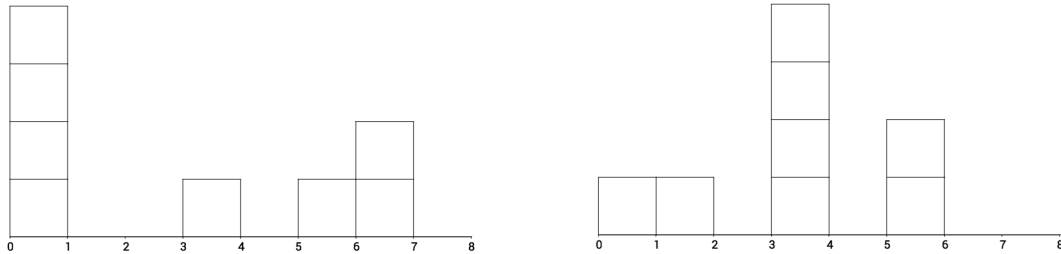


$D = 0$

위 예를 보면 알 수 있듯이 정사각형을 고르게 쌓을수록 D 의 값이 커짐을 확인할 수 있다. 이런 D 는 정보전달과 관련된 수학 이론에 널리 사용되고 있다.



D 의 값은 8개의 정사각형을 몇 곳에 얼마씩 나누어 쌓을 것인가에만 의존하며, 쌓는 구체적인 위치에는 의존하지 않는다. 예를 들어 다음의 두 쌓은 결과는 같은 D 의 값을 가진다.



(나) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, a]$ 에서 정의된 연속함수이고, 이 구간에서 $0 < f(x) < 1$ 을 만족하며 $\int_0^a f(x) dx = 1$ 이라고 하자. 이 때 함수 $f(x)$ 의 ‘고른 정도’를 나타내는 양을 제시문 (가)와 유사하게 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D = - \int_0^a f(x) \ln f(x) dx .$$

[문제 2-1] 제시문 (가)에서 $n=3$ 인 경우 $2^3 = 8$ 개의 정사각형을 구간 $[0, 1], [1, 2], \dots, [7, 8]$ 에 나누어 쌓게 된다.

(1) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k 값이 0, 1, 2, 4, 8중 하나인 쌓기 방법 중에 $D=2$ 가 되는 경우를 모두 찾아 표현하시오. 다만 쌓기 방법의 표현은 크기가 큰 순서대로 다음과 같이 나열하시오.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

[풀이] (2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0), --- 2점

(4, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) 두 가지(뿐) 이다. --- 5점

(채점 시 참고 하세요)

- (2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0)는 이미 제시문에 주어졌으므로 2점으로 배점합니다.
- 큰 순서대로 나열하지 않은 경우 1점씩 감점입니다.
- 그림으로 표현한 아이들도 있습니다.

(2) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k 값이 0, 1, 2중 하나일 때 가능한 모든 D 의 값의 개수를 구하시오.

(풀이) 이 경우 쌓기 방법들을 위 문제의 표현 방법으로 찾으면 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0), (2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0), (2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0)이며 --- 각 1점

각각 경우의 D 의 값은 $3, \frac{11}{4}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2$ 가 되어 다섯 개이다. --- 2점

(채점 시 참고 하세요)

- (1)번처럼 큰 순서로 표현하지 않더라도 괜찮습니다. 가령 (2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0)를 두 개짜리 두 곳, 하나 짜리 네 곳이라고 해도 됩니다. 각 1점입니다.



2016학년도 자연계열(오후) 채점기준 자연계열(오후)

- 찾은 방법들의 D 값 계산을 정확하게 했지만 정답이 아닌 경우는 1점입니다.

[문제 2-2] 제시문 (가)에서 구간 $[0,1]$ 에 2^{n-1} 개, 구간 $[1,2]$ 에 2^{n-2} 개, ..., 구간 $[n-1,n]$ 에 1개, 구간 $[n,n+1]$ 에 마지막 1개를 쌓는 경우를 생각하자.

(1) (9점) 이때 D 의 값을 구하시오.

[풀이] 정의에 의하여 D 의 값은 $-\sum_{k=1}^n \frac{2^{n-k}}{2^n} \log_2 \frac{2^{n-k}}{2^n} - \frac{1}{2^n} \log_2 \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^n}$ 이다. --- 9점

(채점 시 참고 하세요)

- 위 식의 첫 식까지만 구하면 4점입니다. 마지막 떨어진 항이 포함되지 않으면 1점 감점입니다.
- 로그 함수의 성질을 이용해서 잘 정리하는 것에 5점을 배점합니다.

(2) (9점) n 이 무한대로 갈 때 D 의 극한값을 구하시오. (힌트: $\frac{2k}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2^{k+1}} + \frac{1}{4} \frac{k-1}{2^{k-1}}$)

[풀이] n 이 무한대로 갈 때 $\frac{n}{2^n}$ 은 0으로 간다. --- 2점

또한 힌트를 이용하면

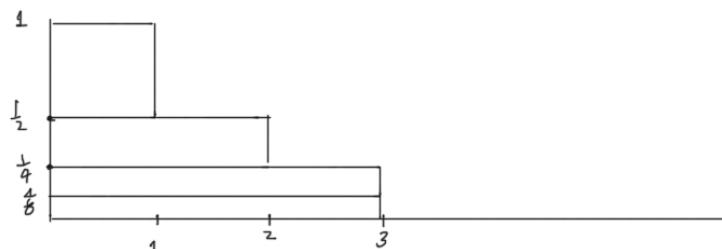
$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{2^{k+1}} + \frac{1}{4} \frac{k-1}{2^{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^{k+1}} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{2^{k-1}}$$

을 관찰 할 수 있고, --- 4점

구하고자 하는 극한 값을 S 라고 하면 위식의 양변에서 n 이 무한대로 보내면 $S = S - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}S$ 를 얻게 되어 $S=2$ 이다. --- 3점

[별해] 아래 예와 같이 영역들의 넓이가 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \dots, \frac{n}{2^n}, \frac{n}{2^n}$ 인 사각형들을 위에서 아래로 순차적으로 쌓으면 전체 넓이가 각 구간 $[0,1], \dots, [n-1,n]$ 위의 영역들의 합과 같고, --- 7점

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$ 이 되어 급수의 값은 $\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ 이고, 극한값은 2이다. --- 2점



< $n=3$ >

(채점 시 참고 하세요)

- 풀이에서 극한을 구하는 방법과 비슷한 방법으로 구하는 학생이 있습니다.



[문제 2-3] 제시문 (나)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) 자연수 n 대하여 구간 $[0, n]$ 에 정의된 함수 $f(x) = ce^{-\frac{x}{n}}$ 의 정적분 값이 1이 되는 상수 c 를 찾으시오.

[풀이] 각 n 에 대하여 $f(x)$ 를 구간 $[0, n]$ 에서 정적분을 하면

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^n ce^{-\frac{x}{n}} dx \quad \text{--- 4점}$$

$$= \left[-cne^{-\frac{x}{n}} \right]_0^n = cn(1 - e^{-1}) \quad \text{--- 4점}$$

이 된다.

그러므로 $c = \frac{1}{n(1 - e^{-1})} = \frac{e}{n(e - 1)}$ 이다. --- 1점

(2) (9점) 위의 함수에 대하여 D 의 값을 구하고, n 이 무한대로 갈 때 D 의 극한값을 구하시오.

[풀이] (* $n = 1$ 인 경우 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{-1}} e^{-x} = \frac{e}{e - 1} e^{-x}$ 이고 구간 $[0, 1]$ 의 모든 x 에 대하여 $0 < f(x) < 1$ 을 만족하지는 않기 때문에 제시문 (나)에 정의된 D 값의 계산에서 제외된다.)

$n \geq 2$ 의 경우 $f(x) = \frac{e}{n(e - 1)} e^{-\frac{x}{n}}$ 이고

$$D = - \int_0^n f(x) \ln f(x) dx$$

$$= - \frac{e}{n(e - 1)} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} \left(\ln \frac{e}{n(e - 1)} - \frac{x}{n} \right) dx$$

$$= - \frac{e}{n(e - 1)} \ln \frac{e}{n(e - 1)} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} dx + \frac{e}{n(e - 1)} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} \frac{x}{n} dx$$

이 된다 --- 3점

치환 $y = \frac{x}{n}$ 에 의하여 마지막 식은

$$\frac{e}{e - 1} \left[(\ln n - 1 + \ln(e - 1)) \int_0^1 e^{-y} dy + \int_0^1 e^{-y} y dy \right]$$

이 되고, 두 정적분의 값은 치환적분법, 부분적분법에 의하여

$$1 - e^{-1} = \frac{e - 1}{e}, \quad 1 - 2e^{-1} = \frac{e - 2}{e}$$



이기 때문에

$$D = \ln n - 1 + \ln(e-1) + \frac{e-2}{e-1} \quad \text{--- 5점}$$

이고 n 이 무한대로 갈 때 극한값은 ∞ 이다. --- 1점

(채점 시 참고 하세요)

- 정의에 잘 넣고 로그 성질을 이용해서 잘 표현하는 것이 3점입니다.
- 계산 부분은 치환에 2점, 부분적분에 3점으로 하세요.