자연계열(오후)

2017학년도 논술고사

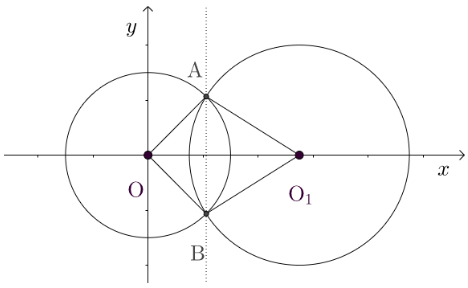
자연계열(오후) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 :8

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

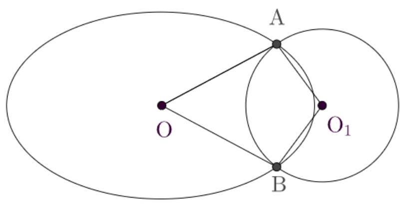
(가) 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 것은 그리스 시대 수학자들의 연구와 관련이 있다. 'Ellipse', 'Parabola', 'Hyperbola' 는 각각 그리스어 '모자라다','적당하다','초과하다'는 뜻을 가지고 있으며 원뿔의 단면과 밑면이 이루는 각과 모서리와 밑면이 이루는 각 사이의 관계와 관련이 있다. 이런 이차곡선은 산업현장에서 다양하게 사용되고 있으며 **이차곡선들의 교점과 관련된 문제**는 수학 이외의 분야에서 자주 나타나고 있다.

(나) 원 $x^2 + y^2 = r_1^2$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$이 그림과 같이 만나고 있다. (단, $r_1^2 + r_2^2 \le d^2$)

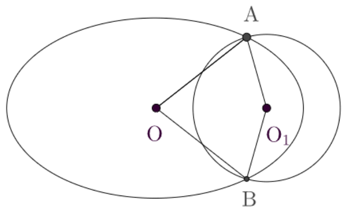


[그림 1]

(다) 타원과 원의 교점이 2개인 경우, [그림 2]처럼 교점 두 개와 원의 중심 O_1을 잇는 두 선분(선분 AO_1와 BO_1)이 각각 타원과 두 점에서 만나거나 [그림 3]처럼 교점 두 개와 점 O를 잇는 두 선분(선분 AO와 BO)이 각각 원과 두 점에서 만날 수도 있다.



[그림 2]



[그림 3]

[문제 1-1] 제시문 (나)에서 두 원의 교점을 A, B 라 하자.

(1) (8점) 점 A와 점 B의 좌표를 구하시오.

[풀이] 식 $x^2 + y^2 = r_1^2$ 와 식 $(x-d)^2 + y^2 = r_2^2$ 을 연립하면

$y^2 = r_1^2 - x^2 = r_2^2 - (x-d)^2$ 에서 $-2dx + d^2 = (x-d)^2 - x^2 = r_2^2 - r_1^2$. 따라서

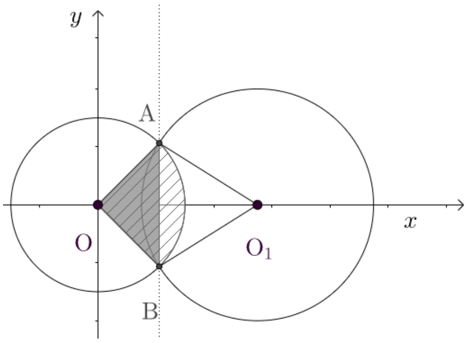
$x = \dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$. 이제 $y = \pm\sqrt{r_1^2 - (\dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d})^2}$

$= \pm\dfrac{\sqrt{2r_1^2 d^2 + 2r_1^2 r_2^2 + 2r_2^2 d^2 - r_1^4 - r_2^4 - d^4}}{2d}$

따라서 $A\left(\dfrac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}, \sqrt{r_1^2-\left(\dfrac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}\right)^2}\right)$, $B\left(\dfrac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}, -\sqrt{r_1^2-\left(\dfrac{d^2+r_1^2-r_2^2}{2d}\right)^2}\right)$이다.

(2) (8점) $\theta_1 = \angle AOB$, $\theta_2 = \angle AO_1B$라 할 때 두 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 θ_1과 θ_2로 나타내시오.

[풀이] 빗금친 부분의 넓이는 부채꼴 ABO의 넓이에서 삼각형 ABO의 넓이를 빼면 되므로



$\dfrac{1}{2}r_1^2\theta_1 - \dfrac{1}{2}r_1^2\sin\theta_1 = \dfrac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1)$

비슷하게 반대쪽 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \dfrac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$

또는 만약 $r_1^2 + r_2^2 = d^2$이면 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\dfrac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \dfrac{1}{2}r_2^2(\pi - \theta_1 - \sin\theta_1)$ 등 다양한 답의 꼴이 나올 수 있다.

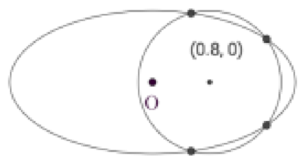
[문제 1-2] 타원 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ $(d \geq 0)$의 교점의 개수를 d에 따라 구하면 다음과 같다.

	$d = 0$	$0 < d < 1$	$d = 1$	$1 < d < 3$	$d = 3$	$d > 3$
교점의 개수	2	e	3	f	1	0
수학적 근거		(g)		(h)		

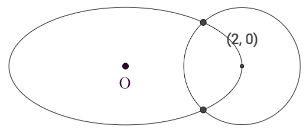
(1) (12점) 위 표에서 값 e와 값 f를 구하고, (g)와 (h)의 자리에 들어갈 수학적 근거를 제시하시오.

[풀이] 두 식 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$과 $(x-d)^2+y^2=1$을 연립하면 $\dfrac{x^2}{4}=1-y^2=(x-d)^2$이므로 $\pm\dfrac{x}{2}=x-d$. 따라서 $x=2d$일 때 $y=\sqrt{1-d^2}$ 과 $x=\dfrac{2}{3}d$일 때 $y=\sqrt{1-\dfrac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다.

$0<d<1$일 때 $x=2d$와 $x=\dfrac{2}{3}d$ 둘 다 근이 될 수 있으므로 교점의 개수는
4 $(e=4)$

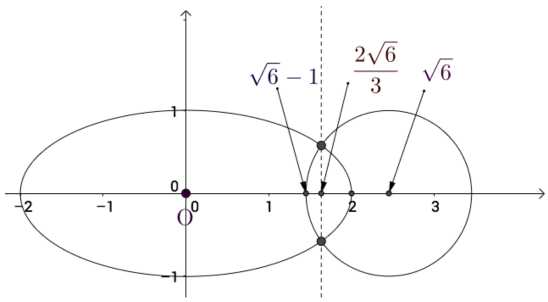


$1<d<3$일 때 $x=\dfrac{2}{3}d$ 만 근이 될 수 있고 교점의 개수는 2 $(f=2)$



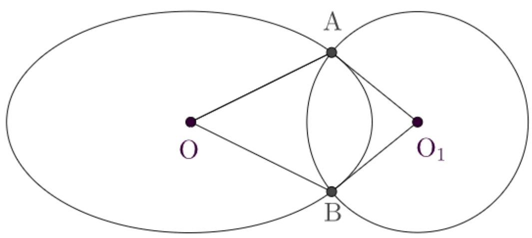
(2) (8점) 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$과 원 $(x-\sqrt{6})^2+y^2=1$에 의해 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분으로 표현하시오.

[풀이] 식 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$와 식 $(x-\sqrt{6})^2+y^2=1$을 연립하면 두 점 $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$을 얻는다.



따라서 영역의 넓이는 $2\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx+2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}}\sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx$로 표현할 수 있다.

[문제 1-3] (14점) 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$과 원 $(x-d)^2+y^2=1$이 있을 때, 제시문 (다)에서 나타나는 경우와는 다르게 사각형 OAO_1B가 **'타원과 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역'**을 포함하도록 하는 값 d의 범위를 구하시오.



[풀이] 두 식 ① $\frac{x^2}{4}+y^2=1$과 ② $(x-d)^2+y^2=1$을 연립하면 $\frac{x^2}{4}=1-y^2=(x-d)^2$이므로 $\pm\frac{x}{2}=x-d$. 따라서 $x=2d$일 때 $y=\sqrt{1-d^2}$ 과 $x=\frac{2}{3}d$일 때 $y=\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 이 교점이 될 수 있다. 그리고 교점이 2개인 경우는 $1<d<3$일 때 이므로 A와 B의 x좌표는 $\frac{2}{3}d$

(i) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의 접선식은 $\frac{2d}{3}\cdot\frac{x}{4}+\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\cdot y=1$에서 $y=-\frac{d}{6\sqrt{1-d^2/9}}x+\frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$. 이 식에서 $x=d$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y=\frac{-d^2+6}{6\sqrt{1-d^2/9}}\le 0$ 따라서 $d\ge\sqrt{6}$

(ii) $(x-d)^2+y^2=1$의 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의 접선식은 $(\frac{2}{3}d-d)(x-d)+\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\,y=1$에서 $y=\frac{\frac{d}{3}(x-d)}{\sqrt{1-d^2/9}}+\frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$

이 식에서 $x=0$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y=\frac{-d^2+3}{3\sqrt{1-d^2/9}}\le 0$ 따라서 $d\ge\sqrt{3}$

(i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6}\le d<3$.

(참고) $d=\sqrt{6}$일 때 AO_1은 타원의 접선이지만 AO는 원의 접선이 아니다.

[별해] 기울기를 비교할 수도 있다.

(i) 선분 OA의 기울기는 $\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}$이고 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의

$(x-d)^2+y^2=1$의 접선의 기울기는 $\frac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 그림과 같이 나타나려면 $\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}\le\frac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

이제 $1-\frac{d^2}{9}\le\frac{2d^2}{9}$ 이므로 $d\ge\sqrt{3}$

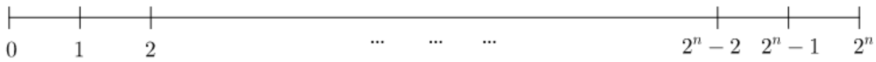
(ii) 선분 O_1A의 기울기는 $\frac{0-\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{d-\frac{2d}{3}}$이고 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의

$\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 접선의 기울기는 $\frac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 그림과 같이 나타나려면 $-\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{d}{3}}\ge\frac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

이제 $6(1-\frac{d^2}{9})\le\frac{d^2}{3}$ 이므로 $d\ge\sqrt{6}$ (i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6}\le d<3$.

[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 아래의 수직선 위의 구간 $[0,1], [1,2], \ldots, [2^n-1, 2^n]$ (n은 자연수)위에 한 변의 길이 1인 2^n개의 정사각형을 나누어 쌓으려고 한다.

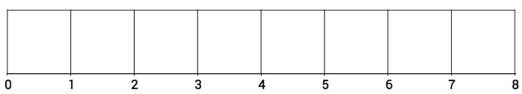


쌓고 난 결과에 대하여 다음과 같이 D를 정의할 수 있다.

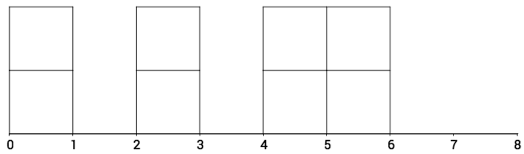
$$D = -\sum_{k=1}^{2^n} \frac{x_k}{2^n} \log_2 \frac{x_k}{2^n}.$$

(단, x_k는 구간 $[k-1, k]$에 쌓인 정사각형의 개수이고, $\frac{0}{2^n} \cdot \log_2 \frac{0}{2^n} = 0$으로 정의하자.) 이 때 $\frac{x_k}{2^n}$의 값은 음이 아닌 실수들이며 합이 1이다.

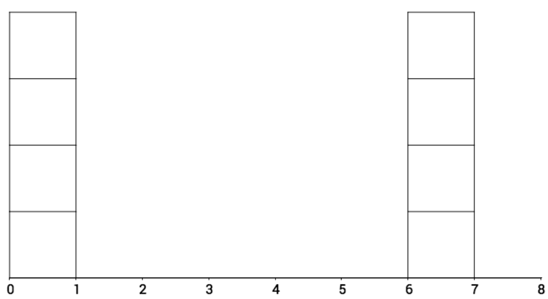
다음은 $n=3$일 때의 몇 가지 쌓은 결과들에 대한 D의 값이다.



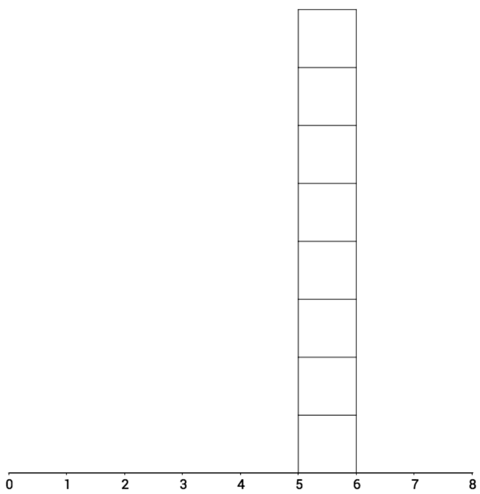
$D=3$



$D=2$



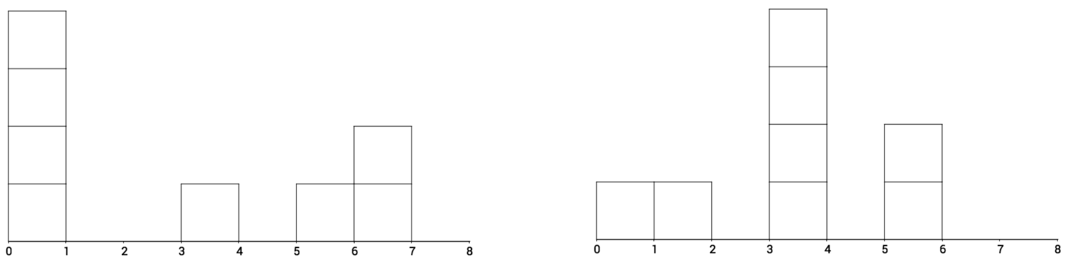
$D=1$



$D=0$

위 예를 보면 알 수 있듯이 정사각형을 고르게 쌓을수록 D의 값이 커짐을 확인할 수 있다. 이런 D는 정보전달과 관련된 수학 이론에 널리 사용되고 있다.

D의 값은 8개의 정사각형들을 몇 곳에 얼마씩 나누어 쌓을 것인가에만 의존하며, 쌓는 구체적인 위치에는 의존하지 않는다. 예를 들어 다음의 두 쌓은 결과는 같은 D의 값을 가진다.



(나) 함수 $f(x)$가 구간 $[0,a]$에서 정의된 연속함수이고, 이 구간에서 $0<f(x)<1$을 만족하며 $\int_0^a f(x)\,dx = 1$이라고 하자. 이 때 함수 $f(x)$의 '고른 정도'를 나타내는 양을 제시문 (가)와 유사하게 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D = -\int_0^a f(x)\ln f(x)\,dx\,.$$

[문제 2-1] 제시문 (가)에서 $n=3$인 경우 $2^3=8$개의 정사각형을 구간 $[0,1],[1,2],\ldots,[7,8]$에 나누어 쌓게 된다.

(1) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k값이 $0,1,2,4,8$중 하나인 쌓기 방법 중에 $D=2$가 되는 경우를 모두 찾아 표현하시오. 다만 쌓기 방법의 표현은 크기가 큰 순서대로 다음과 같이 나열하시오.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

[풀이] (2,2,2,2,0,0,0,0), (4,1,1,1,1,0,0,0) 두 가지(뿐) 이다.

(2) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k값이 $0,1,2$중 하나일 때 가능한 모든 D의 값의 개수를 구하시오.

[풀이] 이 경우 쌓기 방법들을 위 문제의 표현 방법으로 찾으면 (1,1,1,1,1,1,1,1), (2,1,1,1,1,1,1,0), (2,2,1,1,1,1,0,0), (2,2,2,1,1,0,0,0), (2,2,2,2,0,0,0,0)이며 각각 경우의 D의 값은 $3, \frac{11}{4}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 2$가 되어 다섯 개이다.

[문제 2-2] 제시문 (가)에서 구간 $[0,1]$에 2^{n-1}개, 구간 $[1,2]$에 2^{n-2}개, $\cdots$,구간 $[n-1,n]$에 1개, 구간 $[n,n+1]$에 마지막 1개를 쌓는 경우를 생각하자.

(1) (9점) 이때 D의 값을 구하시오.

[풀이] 정의에 의하여 D의 값은 $-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{n-k}}{2^n}\log_2\frac{2^{n-k}}{2^n} - \frac{1}{2^n}\log_2\frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}+\frac{n}{2^n}$이다.

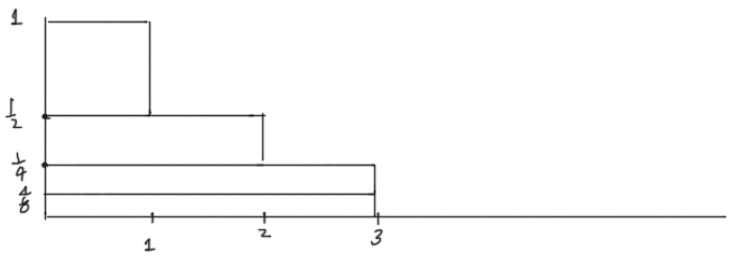
(2) (9점) n이 무한대로 갈 때 D의 극한값을 구하시오. (힌트: $\frac{2k}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4}\frac{k-1}{2^{k-1}}$)

[풀이] n이 무한대로 갈 때 $\frac{n}{2^n}$은 0으로 간다. 또한 힌트를 이용하면

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{2^{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4}\frac{k-1}{2^{k-1}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2^{k+1}}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{2^{k-1}}$$

을 관찰 할 수 있고, 구하고자 하는 극한 값을 S라고 하면 위식의 양변에서 n이 무한대로 보내면 $S=S-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}S$를 얻게 되어 $S=2$이다.

[별해] 아래 예와 같이 영역들의 넓이가 $\frac{1}{2},\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^3},\cdots,\frac{n}{2^n},\frac{n}{2^n}$인 사각형들을 위에서 아래로 순차적으로 쌓으면 전체 넓이가 각 구간 $[0,1],\cdots,[n-1,n]$위의 영역들의 합과 같고, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$이 되어 급수의 값은 $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$이 된다. 그러므로 극한값은 2이다.



< n=3 >

[문제 2-3] 제시문 (나)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) 자연수 n 대하여 구간 $[0,n]$에 정의된 함수 $f(x)=ce^{-\frac{x}{n}}$의 정적분 값이 1이 되는 상수 c를 찾으시오.

[풀이] 각 n에 대하여 $f(x)$를 구간 $[0,n]$에서 정적분을 하면

$$\int_0^n f(x)dx=\int_0^n c\,e^{-\frac{x}{n}}dx=\left[-cne^{-\frac{x}{n}}\right]_0^n=cn(1-e^{-1})$$

이 된다. 그러므로 $c=\frac{1}{n(1-e^{-1})}=\frac{e}{n(e-1)}$이다.

(2) (9점) 위의 함수에 대하여 D의 값을 구하고, n이 무한대로 갈 때 D의 극한값을 구하시오.

[풀이] $n=1$인 경우 $f(x)=\frac{1}{1-e^{-1}}e^{-x}=\frac{e}{e-1}e^{-x}$이고 구간 $[0,1]$의 모든 x에 대하여 $0<f(x)<1$을

만족하지는 않기 때문에 제시문 (나)에 정의된 D값의 계산에서 제외된다.

$n \geq 2$의 경우 $f(x) = \frac{e}{n(e-1)} e^{-\frac{x}{n}}$이고

$$D = -\int_0^n f(x) \ln f(x)\, dx$$

$$= -\frac{e}{n(e-1)} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} \left(\ln \frac{e}{n(e-1)} - \frac{x}{n} \right) dx$$

$$= -\frac{e}{n(e-1)} \ln \frac{e}{n(e-1)} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} dx + \frac{e}{n(e-1)} \int_0^n e^{-\frac{x}{n}} \frac{x}{n} dx$$

이 된다. 치환 $y = \frac{x}{n}$에 의하여 마지막 식은

$$\frac{e}{e-1} \left[(\ln n - 1 + \ln (e-1)) \int_0^1 e^{-y} dy + \int_0^1 e^{-y} y\, dy \right]$$

이 되고 두 정적분의 값은 치환적분법, 부분적분법에 의하여

$$1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e},\ 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}$$

이기 때문에

$$D = \ln n - 1 + \ln(e-1) + \frac{e-2}{e-1}$$

이고 n이 무한대로 갈 때 극한값은 ∞이다.