자연계열(오후, 의학과제외)

2017학년도 논술고사

자연계열 (오후,의학과제외)

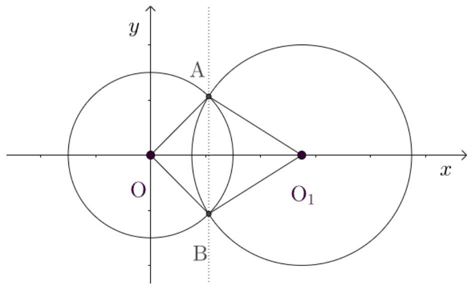
성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

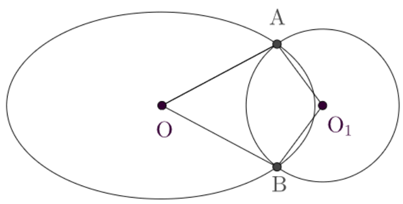
(가) 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 것은 그리스 시대 수학자들의 연구와 관련이 있다. 'Ellipse', 'Parabola', 'Hyperbola' 는 각각 그리스어 '모자라다','적당하다','초과하다'는 뜻을 가지고 있으며 원뿔의 단면과 밑면이 이루는 각과 모서리와 밑면이 이루는 각 사이의 관계와 관련이 있다. 이런 이차곡선은 산업현장에서 다양하게 사용되고 있으며 **이차곡선들의 교점과 관련된 문제**는 수학 이외의 분야에서 자주 나타나고 있다.

(나) 원 $x^2+y^2=r_1^2$과 원 $(x-d)^2+y^2=r_2^2$이 그림과 같이 만나고 있다. (단, $r_1^2+r_2^2 \le d^2$)

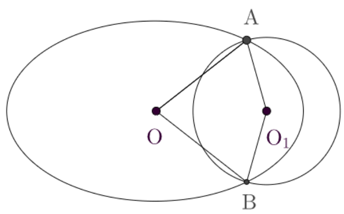


[그림 1]

(다) 타원과 원의 교점이 2개인 경우, [그림 2]처럼 교점 두 개와 원의 중심 O_1을 잇는 두 선분(선분 AO_1와 BO_1)이 각각 타원과 두 점에서 만나거나 [그림 3]처럼 교점 두 개와 점 O를 잇는 두 선분(선분 AO와 BO)이 각각 원과 두 점에서 만날 수도 있다.



[그림 2]



[그림 3]

[문제 1-1] 제시문 (나)에서 두 원의 교점을 A, B 라 하자.

(1) (8점) 점 A와 점 B의 좌표를 구하시오.

(2) (8점) $\theta_1 = \angle AOB$, $\theta_2 = \angle AO_1B$라 할 때 두 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 θ_1과 θ_2로 나타내시오.

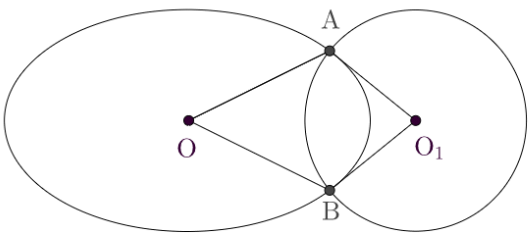
[문제 1-2] 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ $(d \geq 0)$의 교점의 개수를 d에 따라 구하면 다음과 같다.

	$d = 0$	$0 < d < 1$	$d = 1$	$1 < d < 3$	$d = 3$	$d > 3$
교점의 개수	2	e	3	f	1	0
수학적 근거		(g)		(h)		

(1) (12점) 위 표에서 값 e와 값 f를 구하고, (g)와 (h)의 자리에 들어갈 수학적 근거를 제시하시오.

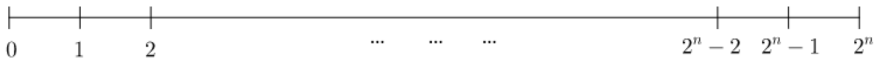
(2) (8점) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-\sqrt{6})^2 + y^2 = 1$에 의해 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 정적분으로 표현하시오.

[문제 1-3] (14점) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ $(d \geq 0)$이 있을 때, 제시문 (다)에서 나타나는 경우와는 다르게 사각형 OAO_1B가 **'타원과 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역'**을 포함하도록 하는 값 d의 범위를 구하시오.



[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 아래의 수직선 위의 구간 $[0,1], [1,2], \ldots, [2^n - 1, 2^n]$ (n은 자연수)위에 한 변의 길이 1인 2^n개의 정사각형을 나누어 쌓으려고 한다.



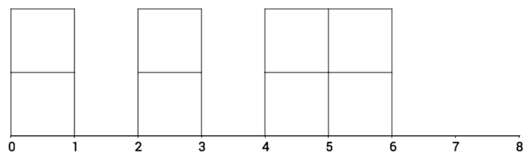
쌓고 난 결과에 대하여 다음과 같이 D를 정의할 수 있다.

$$D = -\sum_{k=1}^{2^n} \frac{x_k}{2^n} \log_2 \frac{x_k}{2^n}.$$

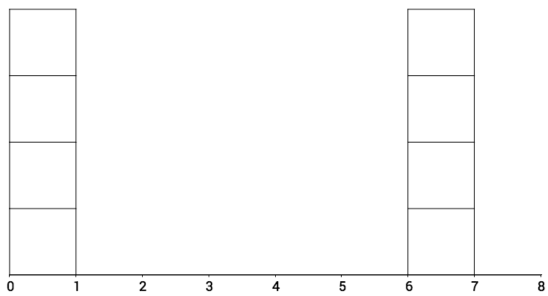
(단, x_k는 구간 $[k-1, k]$에 쌓인 정사각형의 개수이고, $\frac{0}{2^n} \cdot \log_2 \frac{0}{2^n} = 0$으로 정의하자.) 이 때 $\frac{x_k}{2^n}$의 값은 음이 아닌 실수들이며 합이 1이다.

다음은 $n=3$일 때의 몇 가지 쌓은 결과들에 대한 D의 값이다.

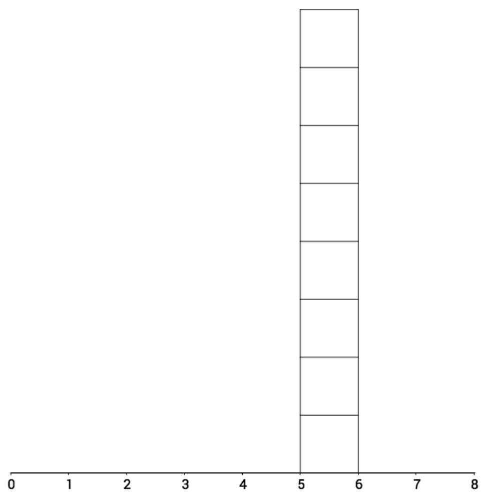
$D = 3$



$D = 2$



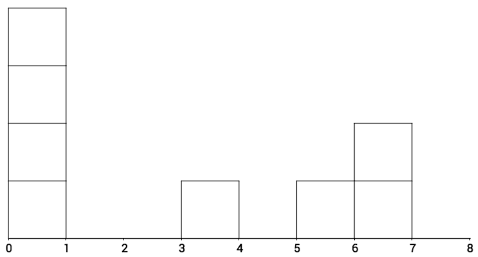
$D = 1$

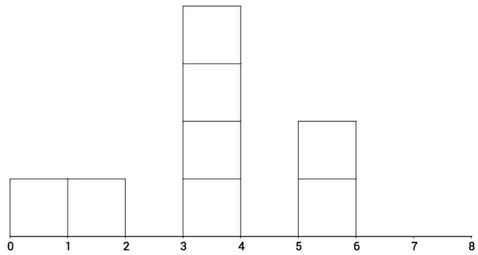


$D = 0$

위 예를 보면 알 수 있듯이 정사각형을 고르게 쌓을수록 D의 값이 커짐을 확인할 수 있다. 이런 D는 정보전달과 관련된 수학 이론에 널리 사용되고 있다.

D의 값은 8개의 정사각형들을 몇 곳에 얼마씩 나누어 쌓을 것인가에만 의존하며, 쌓는 구체적인 위치에는 의존하지 않는다. 예를 들어 다음의 두 쌓은 결과는 같은 D의 값을 가진다.





(나) 함수 $f(x)$가 구간 $[0,a]$에서 정의된 연속함수이고, 이 구간에서 $0<f(x)<1$을 만족하며 $\int_0^a f(x)\,dx = 1$이라고 하자. 이 때 함수 $f(x)$의 '고른 정도'를 나타내는 양을 제시문 (가)와 유사하게 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$D = -\int_0^a f(x) \ln f(x)\, dx\,.$$

[문제 2-1] 제시문 (가)에서 $n=3$인 경우 $2^3=8$개의 정사각형을 구간 $[0,1],[1,2],\ldots,[7,8]$에 나누어 쌓게 된다.

(1) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k값이 $0,1,2,4,8$중 하나인 쌓기 방법 중에 $D=2$가 되는 경우를 모두 찾아 표현하시오. 다만 쌓기 방법의 표현은 크기가 큰 순서대로 다음과 같이 나열하시오.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

(2) (7점) 구간 별 정사각형의 개수 x_k값이 $0,1,2$중 하나일 때 가능한 모든 D의 값의 개수를 구하시오.

[문제 2-2] 제시문 (가)에서 구간 $[0,1]$에 2^{n-1}개, 구간 $[1,2]$에 2^{n-2}개, $\cdots$,구간 $[n-1,n]$에 1개, 구간 $[n,n+1]$에 마지막 1개를 쌓는 경우를 생각하자.

(1) (9점) 이때 D의 값을 구하시오.

(2) (9점) n이 무한대로 갈 때 D의 극한값을 구하시오. (힌트: $\dfrac{2k}{2^{k+1}} = \dfrac{k+1}{2^{k+1}} + \dfrac{1}{4}\dfrac{k-1}{2^{k-1}}$)

[문제 2-3] 제시문 (나)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) 자연수 n 대하여 구간 $[0,n]$에 정의된 함수 $f(x)=ce^{-\frac{x}{n}}$의 정적분 값이 1이 되는 상수 c를 찾으시오.

(2) (9점) 위의 함수에 대하여 D의 값을 구하고, n이 무한대로 갈 때 D의 극한값을 구하시오.