



2017학년도 논술고사

자연계열(오전)
채점기준





[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 자연로그의 밑 e 가 계산된 최초의 기록은 1618년 존 네이피어에 의해 발간된 로그표이다. 그러나 네이피어는 로그 계산의 과정에서 나온 결과 값만을 간단히 다루었을 뿐 자연로그의 밑을 상수로 취급하지는 않았다. 야코프 베르누이는 복리 이자의 계산에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 의 극한값이 수렴함을 발견하였으며, 오일러는 1727년과 1728년 사이에 이 극한값을 e 로 표현하였다.

(나) 실수 a 에 대하여 함수 $p(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+a}$ ($x > 0$)는 a 값과 관계없이 “ $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln p(x) = 1$ ”이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = e$ 가 된다. 따라서 실수 a 가 주어질 때 마다 함수 $p(x)$ 와 상수 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 을 비교할 수 있다.

(다) 우리는 극한과 도함수의 성질을 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있다. 예를 들면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 일 때, 다음 두 명제가 성립한다.

명제 1) 모든 $x > 0$ 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면, 모든 $x > 0$ 에 대하여 $f(x) < 0$

명제 2) 모든 $x > 0$ 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이면, 모든 $x > 0$ 에 대하여 $f(x) > 0$

(라) **평균값 정리**: 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a,b) 에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.



[문제 1-1] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (8점) '평균값정리를 함수 $\ln x$ 에 적용하여' a 값과 관계없이 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln p(x) = 1$ 임을 보이시오.

[풀이] $f(x) = \ln p(x)$ 라 놓고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 을 보이면 된다. 실수 a 를 잡고 고정시킨다고 하자. 평균값정리에 의해

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} (x+1-x) \text{인 } c \text{가 } x \text{와 } x+1 \text{사이에 존재한다. --- 4점}$$

$$\text{정리하면 } \ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{c} \text{이고 } c = x + \alpha_x (0 < \alpha_x < 1) \text{로 표현하면 --- 2점}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+a) \ln(1 + \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+a}{x+\alpha_x} \text{가 되어 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \text{ ---2점}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln p(x) = e$.

$$\begin{aligned} \text{[참고1]} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln p(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+a}{x}) \ln(1 + \frac{1}{x})^x \\ &= 1 \times \ln e = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[참고2]} \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x (1 + \frac{1}{x})^a \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^a = e \times 1^a = e \end{aligned}$$

(2) (8점) 제시문 (다)의 명제 1)을 증명하시오.

[풀이] 결론을 부정하면 $f(x_0) \geq 0$ 인 $x_0 > 0$ 가 존재한다. --- 3점

모든 $x > 0$ 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x_0 + 1) > f(x_0) \geq 0$ 이고 모든 $x > x_0 + 1$ 에 대하여 $f(x) > f(x_0 + 1)$ 이다. ---3점

이는 $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq f(x_0 + 1)$ 이므로 모순이다. ---2점

[문제 1-2] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) $a \geq \frac{1}{2}$ 인 a 에 대하여 $p(x) > e$ ($x > 0$)임을 보이시오.

(2) (9점) $a \leq 0$ 인 a 에 대하여 $p(x) < e$ ($x > 0$)임을 보이시오.

[풀이] (1) $f(x) = (x+a) \ln(1 + \frac{1}{x})$ 라 하면

$$f'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) + (x+a)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{x+a}{x(x+1)} \text{ 이므로 --- 2점}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \text{ (실수 } a \text{에 대하여 성립)}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{x(x+1) - (x+a)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{(2a-1)x + a}{(x(x+1))^2} \text{ ---2점}$$

$$a \geq \frac{1}{2} \text{이므로 } f''(x) > 0 \text{ 이고 } \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0 \text{이므로 } f'(x) < 0 \text{ --- 2점}$$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 이고 명제 2)에 의해 $f(x) > 1$. --- 2점



따라서 $p(x) = e^{f(x)} > e^1 = e \ (x > 0)$ --- 1점

[별해1] 앞의 풀이에서 $a = \frac{1}{2}$ 이면 $f''(x) = \frac{1}{2(x(x+1))^2} > 0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 이므로 $f'(x) < 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 이고 명제 2)에 의해 $(1 + \frac{1}{x})^{x + \frac{1}{2}} > e$. ---6점

$((1 + \frac{1}{x})^{x + \frac{1}{2}} > e$ 언급만 해도 3점)

이제 $a \geq \frac{1}{2}$ 이면 $p(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x + \frac{1}{2} + (a - \frac{1}{2})} > e \times (1 + \frac{1}{x})^{a - \frac{1}{2}} \geq e \times 1 = e$ --- 3점

[풀이] (2) $f(x) = (x+a)\ln(1 + \frac{1}{x})$ 라 하면

$f'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) + (x+a)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{x+a}{x(x+1)}$ 이므로 --- 2점

$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ (실수 a 에 대하여 성립)

$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{x(x+1) - (x+a)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{(2a-1)x + a}{(x(x+1))^2}$ --- 2점

$a \leq 0$ 이므로 $f''(x) < 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 이므로 $f'(x) > 0$ --- 2점

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 이고 명제 1)에 의해 $f(x) < 1$. --- 2점

따라서 $p(x) = e^{f(x)} < e^1 = e \ (x > 0)$ --- 1점

[별해1] 앞의 풀이에서 $a = 0$ 이면 $f''(x) = \frac{-x}{(x(x+1))^2} < 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 이므로 $f'(x) > 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 이고 명제 1)에 의해 $(1 + \frac{1}{x})^x < e$. --- 6점

$((1 + \frac{1}{x})^x < e$ 언급만 해도 3점)

이제 $a \leq 0$ 이면 $p(x) = (1 + \frac{1}{x})^x (1 + \frac{1}{x})^a < e \times (1 + \frac{1}{x})^a \leq e \times 1 = e$ --- 3점

[문제 1-3] 제시문 (나)에서 $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때 다음 문제에 답하시오.

(1) (10점) $p(x_0)$ 가 $p(x)$ 의 최솟값이 되는 양수 x_0 가 단 하나 존재하고 $0 < p(x_0) < e$ 임을 보이시오.

[풀이] $f''(\frac{a}{1-2a}) = 0$ 이고 부호가 +에서 -로 변하므로

$f'(\frac{a}{1-2a}) = \ln(\frac{1-a}{a}) - 2(1-2a)$ 는 유일한 극값이고 극댓값. $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ 이므로

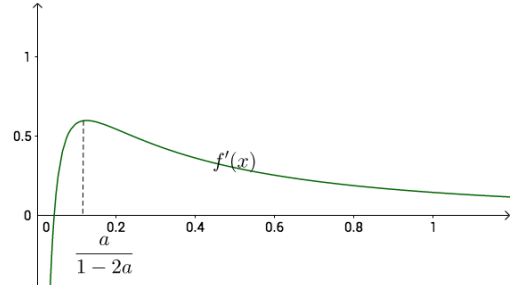
$f'(\frac{a}{1-2a}) = \ln(\frac{1-a}{a}) - 2(1-2a) > 0$ 임은 분명하다. --- 4점

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+a}{x+1} - 1 - \ln x - \frac{a}{x} \text{에서}$$

$$g(t) = \ln t - at = t\left(\frac{\ln t}{t} - a\right) \text{를 생각하면}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = -\infty \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty \text{ --- 4점}$$

이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 사이값 정리에 의해 구간 $(0, \frac{a}{1-2a})$ 에

$f'(x_0) = 0$ 되는 점 x_0 가 존재한다. 이 점에서의 $f'(x)$ 의 부호는 $-$ 에서 $+$ 로 변하고 유일한 극값이므로 $x = x_0$ 에서 최솟값 --- 2점

을 갖는다.

(2) (6점) x_0 가 부등식 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0 < \frac{a}{1-2a}$ 를 만족함을 보이시오.

$$\text{[풀이]} \quad f'\left(\frac{a^2}{1-2a}\right) = \ln\left(1 + \frac{1-2a}{a^2}\right) - \frac{\frac{a^2}{1-2a} + a}{\frac{a^2}{1-2a}\left(1 + \frac{1-2a}{a^2}\right)}$$

$$= \ln\frac{(a-1)^2}{a^2} - (1-2a)\frac{a^2 + a(1-2a)}{a^2(a-1)^2} = 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{a(1-a)}{a^2(a-1)^2}$$

$$= 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{1}{a(1-a)} \text{ --- 3점}$$

이므로

$$h(a) = 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{1}{a(1-a)} \text{라 두고 미분하면}$$

$$h'(a) = 2\left(\frac{-1}{1-a} - \frac{1}{a}\right) - \frac{-2a(1-a) - (1-2a)^2}{(a(1-a))^2} = 2\frac{-a-1+a}{a(1-a)} - \frac{-2a(1-a) - (1-2a)^2}{(a(1-a))^2}$$

$$= \frac{-2}{a(1-a)} - \frac{-2a^2 + 2a - 1}{(a(1-a))^2}$$

$$= \frac{-2a(1-a) + 2a^2 - 2a + 1}{(a(1-a))^2} = \frac{(2a-1)^2}{(a(1-a))^2} > 0 \text{이고 } h\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{이므로}$$

모든 a ($0 < a < \frac{1}{2}$)에 대하여 $h(a) < 0$ 이고 $f'\left(\frac{a^2}{1-2a}\right) < 0$. --- 3점

따라서 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0$.

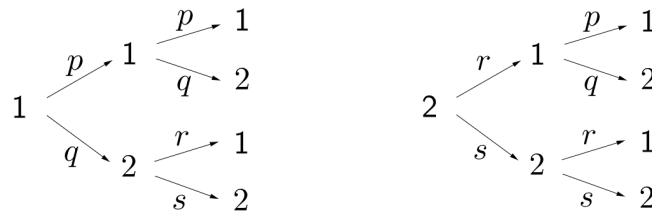
[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 약용이네는 매일 오후 6시가 되면 집에서 식사(E_1)를 하거나 외식(E_2)을 한다. 내일부터는 매일 저녁 식사를 다음 표의 규칙에 따라 E_1 또는 E_2 을 선택한다. p, q 는 양수이고 r, s 는 음이 아닌 실수이며 $p + q = 1, r + s = 1$ 을 만족한다.

2일 식사	확률
E_1 다음에 E_1	p
E_1 다음에 E_2	q
E_2 다음에 E_1	r
E_2 다음에 E_2	s

[표1]

(나) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 두 번 적용한 아래의 수형도는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사의 모든 가능한 경우들을 표현한다.



예를 들면 $1 \xrightarrow{p} 1 \xrightarrow{q} 2$ 는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사가 E_1, E_1, E_2 인 것을 표현하며 그 확률은 $E_1 \rightarrow E_1$ 의 확률과 $E_1 \rightarrow E_2$ 의 확률의 곱인 $p \times q$ 가 된다고 하자. 나머지 경우들의 확률도 비슷하게 확률의 곱으로 얻어진다고 하면 우리는 다음의 표를 얻게 된다.

3일 식사	확률
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$p \times p + q \times r$
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$p \times q + q \times s$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$r \times p + s \times r$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$r \times q + s \times s$

[표2]

(다) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 n 번 적용하고 제시문 (나)와 같이 확률을 구해나갈 때, 오늘 저녁 식사가 E_1 일 경우 n 일($n = 1, 2, \dots$) 이후 저녁 식사가 E_1 일 확률을 a_n , E_2 일 확률을 b_n 이라고 표시하고, 오늘 저녁 식사가 E_2 일 경우 n 일($n = 1, 2, \dots$) 이후 저녁 식사가 E_1 일 확률을 c_n , E_2 일 확률을 d_n 이라고 표시하자. 예를 들어 [표1]의 확률들은 a_1, b_1, c_1, d_1 이고 [표2]에 계산된 확률들은 a_2, b_2, c_2, d_2 이다.

(라) 실수 x, y 와 자연수 n 에 대하여 다음의 이항정리가 성립한다.



$$(x+y)^n = {}_n C_0 x^n y^0 + {}_n C_1 x^{n-1} y^1 + \dots + {}_n C_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_n C_n x^0 y^n.$$

[문제 2-1] 제시문 (가)~(다)에서 $p = s, q = r$ 이라고 하자.

(1) (5점) a_3, b_3 을 구하시오.

[풀이1] 제시문 (나)에 의해 $a_3 = a_2 p + b_2 q = (p^2 + q^2)p + (2pq)q = p^3 + 3pq^2$, --- 3점

$$b_3 = a_2 q + b_2 p = (p^2 + q^2)q + (2pq)p = 3p^2 q + q^3 \quad \text{--- 2점}$$

[풀이2] $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$$

네 가지이며 그 확률들의 합인 a_3 은 $p^3 + 3pq^2$ 이다. --- 3점

또한 $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2$$

네 가지이며 그 확률들의 합인 b_3 은 $3p^2 q + q^3$ 이다. --- 2점

(2) (7점) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = d_n, b_n = c_n$ 임을 보이시오.

[풀이1] 수학적 귀납법을 사용한다.

$$a_1 = p = s = d_1, \quad b_1 = q = r = c_1 \quad \text{--- 1점}$$

만일 $a_n = d_n, b_n = c_n$ 이라면 --- 1점

$$a_{n+1} = a_n \cdot p + b_n \cdot q = d_n \cdot p + c_n \cdot q = c_n \cdot q + d_n \cdot p = d_{n+1} \quad \text{--- 2점}$$

$$b_{n+1} = a_n \cdot q + b_n \cdot p = d_n \cdot q + c_n \cdot p = c_n \cdot p + d_n \cdot q = c_{n+1} \quad \text{--- 2점}$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = d_n, b_n = c_n$ --- 1점

[풀이2] 오늘 E_2 로 시작하여 n 일 후에 E_2 가 되는 경우들은 오늘 E_1 로 시작하여 n 일 후에 E_1 이 되는 경우들에서 E_1 대신 E_2, E_2 대신 E_1 으로 바꾼 경우들과 같다. --- 3점

한편 이 문제에서 $E_1 \rightarrow E_1$ 의 확률과 $E_2 \rightarrow E_2$ 의 확률이 같고, $E_1 \rightarrow E_2$ 의 확률과 $E_2 \rightarrow E_1$ 의 확률이 같기 때문에 a_n 은 d_n 과 같다. --- 3점

똑 같은 이유로 b_n 과 c_n 은 같다. --- 1점

[채점 참고]

아래 문제 [2-2] (1)의 문장을 이용, 추측한 후 $p = s, q = r$ 을 이용해서 답하는 경우가 있습니다.

[2-2]를 제대로 풀었다면 최대 7점, 그렇지 않다면 최대 4점으로 하겠습니다.

[문제 2-2] 제시문 (가)~(다)에서 $p = s, q = r$ 이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_n 이 다음 합



$${}_nC_0 p^n q^0 + {}_nC_1 p^{n-1} q^1 + \dots + {}_nC_{n-1} p^1 q^{n-1} + {}_nC_n p^0 q^n$$

의 홀수 번째 항들의 합 ${}_nC_0 p^n q^0 + {}_nC_2 p^{n-2} q^2 + {}_nC_4 p^{n-4} q^4 + \dots$ 이 됨을 보이시오.

[풀이1] E_1 이후의 n 번의 선택에서 연속으로 E_1 을 모두 선택하게 되는 방법은 오직 한 개(${}_nC_0$)이며 확률은 p^n 이다. 다음은 n 번의 선택에서 전날과 다른 선택을 두 번하고 나머지 $n-2$ 번 전날과 같은 선택을 하는 경우들로 각각의 확률은 $p^{n-2}q^2$ 이며 그 경우의 수는 ${}_nC_{n-2} = {}_nC_2$ 가 된다. 다음은 n 번의 선택에서 전날과 다른 선택을 네 번하고 나머지 $n-4$ 번 전날과 같은 선택을 하는 경우들로 각각의 확률은 $p^{n-4}q^4$ 이며 그 경우의 수는 ${}_nC_{n-4} = {}_nC_4$ 가 된다. 이렇게 확률을 구해가면 결국 주어진 이항정리의 홀수 번째 항들의 합이 a_n 이 됨을 알 수 있다. --- 8점

[풀이2] $a_{n+1} = a_n \cdot p + b_n \cdot q$ 에서 $b_n = \frac{a_{n+1} - p a_n}{q}$ 를 얻고 $b_{n+1} = a_n \cdot q + b_n \cdot p$ 에 대입하면

$$\frac{a_{n+2} - p a_{n+1}}{q} = q a_n + p \cdot \frac{a_{n+1} - p a_n}{q} \quad \text{--- 1점}$$

정리하면 $a_{n+2} = 2p a_{n+1} + ((1-p)^2 - p^2) a_n = 2p a_{n+1} + (1-2p) a_n$ --- 1점

이제 $a_{n+2} - a_{n+1} = (2p-1)(a_{n+1} - a_n)$ 에서 --- 1점

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2p-1)^n (a_2 - a_1) = (2p-1)^n (p^2 + (1-p)^2 - p) = -(1-p)(2p-1)^{n+1} \quad \text{--- 1점}$$

$$\text{그러므로 } a_n = a_{n-1} + (p-1)(2p-1)^{n-1} = a_{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-1} = \dots$$

$$= a_1 + (p-1)(2p-1)^1 + \dots + (p-1)(2p-1)^{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-1}$$

$$= p + (p-1)(2p-1) \frac{1 - (2p-1)^{n-1}}{1 - (2p-1)} = p - \frac{2p-1}{2} (1 - (2p-1)^{n-1})$$

$$= \frac{1 + (2p-1)^n}{2} = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} \quad \text{--- 3점}$$

a_n 은 ${}_nC_0 p^n q^0 + {}_nC_1 p^{n-1} q^1 + \dots + {}_nC_{n-1} p^1 q^{n-1} + {}_nC_n p^0 q^n$ 의 홀수 번째 항들의 합과 같다. --- 1점

(2) (8점) 이 경우 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구하시오.

[풀이] 주어진 이항정리는 $(p+q)^n = 1$ 이고 $a_n + b_n = 1$ 이기 때문에 b_n 은 이항정리의 짝수 번째 항들의 합과 같다. 홀수 번째 항들의 합은 $\frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} = \frac{1 + (p-q)^n}{2}$ 의 전개를 통해 얻을 수 있기 때문에

$$a_n = \frac{1 + (p-q)^n}{2} \text{이다. --- 2점}$$

$$p-q = p - (1-p) = 2p-1 \text{이고, } 0 < p < 1 \text{ 이므로 } -1 < 2p-1 < 1 \text{ 따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

--- 2점

짝수 번째 항들의 합은 $\frac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} = \frac{1 - (p-q)^n}{2}$ 의 전개를 통해 얻을 수 있기 때문에

$$b_n = \frac{1 - (p-q)^n}{2} \text{이다. --- 2점}$$



위와 비슷하게 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$ 이다. --- 2점

$(1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 을 이용하여 b_n 의 극한값을 얻을 수도 있다. --- 4점)

[문제 2-3] 제시문 (가)~(다)에서 $r = 1, s = 0$ 이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_2, b_2, a_3, b_3 을 q 에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

[풀이] a_2 . $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$ 의 확률인 a_2 는 [표2]에 의하여 $p^2 + q = (1-q)^2 + q = 1 - q + q^2$ 이다. --- 1점

b_2 . $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$ 의 확률인 b_2 는 [표2]에 의하여 $pq = (1-q)q = q - q^2$ 이 된다. --- 1점

a_3 . 비슷하게 $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$$

이며 그 확률들의 합인 a_3 은

$$\begin{aligned} & p \cdot p \cdot p + p \cdot q \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot p + q \cdot 0 \cdot 1 \\ &= p^3 + 2pq = (1-q)^3 + 2(1-q)q = 1 - q + q^2 - q^3 \quad \text{--- 3점} \end{aligned}$$

b_3 . 비슷하게 $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2$$

이며 그 확률들의 합인 b_3 은

$$\begin{aligned} & p \cdot p \cdot q + p \cdot q \cdot 0 + q \cdot 1 \cdot q + q \cdot 0 \cdot 0 \\ &= p^2q + q^2 = (1-q)^2q + q^2 = q - q^2 + q^3 \quad \text{--- 3점} \end{aligned}$$

[채점 참고] 계산이 맞긴 한데 q 에 대한 오름차순 다항식으로 표현되지 않으면 1점씩 감점

(2) (8점) 확률 a_n, b_n 의 일반항을 q 에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

[풀이1] $a_{n+1} = pa_n + b_n, b_{n+1} = qa_n$ 에서 $a_{n+1} = pa_n + b_n = (1-q)a_n + qa_{n-1}$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = (-q)(a_n - a_{n-1})$ 이제 $a_{n+1} - a_n = (-q)^{n-1}(a_2 - a_1) = (-q)^{n-1}q^2 = (-q)^{n+1}$

따라서 $a_n = 1 + (-q) + (-q)^2 + \dots + (-q)^n$ --- 4점

$$b_n = 1 - a_n = -\{(-q) + (-q)^2 + \dots + (-q)^n\} \quad \text{--- 4점}$$

[풀이2] 위의 논제를 통해 우리는

$$a_n = 1 + (-q) + (-q)^2 + \dots + (-q)^n, \quad b_n = -\{(-q) + (-q)^2 + \dots + (-q)^n\}$$

이 됨을 추측할 수 있다. --- 각 4점



[채점 참고]

- [문제 2-2]의 풀이와 비슷하게 추론해갈 경우

$$a_n = {}_n C_0 p^n + {}_{n-1} C_1 p^{n-2} q^1 + {}_{n-2} C_2 p^{n-4} q^2 + \dots,$$

$$b_n = {}_{n-1} C_0 p^{n-1} q + {}_{n-2} C_1 p^{n-3} q^2 + \dots$$

까지는 얻을 수 있지만 q 의 오름차순 전개가 매우 어렵습니다. 각각 최대 2점입니다.

(3) (6점) 이 경우 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구하시오.

[풀이] 등비수열의 공식에 의하여 $a_n = \frac{1 - (-q)^{n+1}}{1 + q}, b_n = -\frac{(-q)(1 - (-q)^n)}{1 + q}$ 이 되고 그 극한 값들은 각각 $\frac{1}{1+q}, \frac{q}{1+q}$ 이다. --- 각 3점

[채점 참고] 답만 맞아도 각 3점 해도 됩니다.