자연계열(오전)

2017학년도 논술고사

자연계열(오전) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 :8

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 자연로그의 밑 e가 계산된 최초의 기록은 1618년 존 네이피어에 의해 발간된 로그표이다. 그러나 네이피어는 로그 계산의 과정에서 나온 결과 값만을 간단히 다루었을 뿐 자연로그의 밑을 상수로 취급하지는 않았다. 야코프 베르누이는 복리 이자의 계산에서 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$의 극한값이 수렴함을 발견하였으며, 오일러는 1727년과 1728년 사이에 이 극한값을 e로 표현하였다.

(나) 실수 a에 대하여 함수 $p(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+a}$ $(x > 0)$는 a값과 관계없이 "$\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1$"이고 $\lim_{x\to\infty}p(x) = e$가 된다. 따라서 실수 a가 주어질 때 마다 함수 $p(x)$와 상수 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$을 비교할 수 있다.

(다) 우리는 극한과 도함수의 성질을 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있다. 예를 들면 $\lim_{x\to\infty}f(x) = 0$ 일 때, 다음 두 명제가 성립한다.

명제 1) 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) > 0$이면, 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) < 0$

명제 2) 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) < 0$이면, 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) > 0$

(라) **평균값 정리**: 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[문제 1-1] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (8점) '**평균값정리를 함수** $\ln x$**에 적용하여**' a값과 관계없이 $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1$임을 보이시오.

[풀이] $f(x) = \ln p(x)$라 놓고 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$을 보인다. 실수 a를 잡고 고정시킨다고 하자. 평균값정리에 의해

$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}(x+1-x)$인 c가 x와 $x+1$사이에 존재한다. 정리하면 $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{c}$이고 $c = x+\alpha_x (0 < \alpha_x < 1)$로 표현하면 $\lim_{x\to\infty}(x+a)\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{x+\alpha_x}$가 되어 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1$.

[참고1] $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x})\ln(1+\frac{1}{x})^x = 1\times\ln e = 1$

[참고2] $\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x(1+\frac{1}{x})^a = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^a = e\times 1^a = e$ 이므로 $\lim_{x\to\infty}\ln p(x) = 1$

(2) (8점) 제시문 (다)의 명제 1)을 증명하시오.

[풀이] 결론을 부정하면 $f(x_0) \ge 0$인 $x_0 > 0$가 존재한다. 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 $f(x_0+1) > f(x_0) \ge 0$이고 모든 $x > x_0+1$에 대하여 $f(x) > f(x_0+1)$이다. 이는 $0 = \lim_{x\to\infty} f(x) \ge f(x_0+1)$ 이므로 모순이다.

[문제 1-2] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) $a \ge \frac{1}{2}$인 a에 대하여 $p(x) > e$ $(x > 0)$임을 보이시오.

(2) (9점) $a \le 0$인 a에 대하여 $p(x) < e$ $(x > 0)$임을 보이시오.

[풀이] (1) $f(x) = (x+a)\ln(1+\frac{1}{x})$라 하면

$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + (x+a)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{x+a}{x(x+1)}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (실수 a 에 대하여 성립)

$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{x(x+1)-(x+a)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{(2a-1)x+a}{(x(x+1))^2}$

$a \ge \frac{1}{2}$이므로 $f''(x) > 0$ 이고 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) < 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 2)에 의해 $f(x) > 1$.

따라서 $p(x) = e^{f(x)} > e^1 = e$ $(x > 0)$

[별해1] 앞의 풀이에서 $a = \frac{1}{2}$이면 $f''(x) = \frac{1}{2(x(x+1))^2} > 0$이고 $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) < 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 2)에 의해 $(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}} > e$.

이제 $a \geq \frac{1}{2}$이면 $p(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}+(a-\frac{1}{2})} > e\times(1+\frac{1}{x})^{a-\frac{1}{2}} \geq e\times 1 = e$

[풀이] (2) $f(x) = (x+a)\ln(1+\frac{1}{x})$라 하면

$f'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + (x+a)(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{x+a}{x(x+1)}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ (실수 a에 대하여 성립)

$f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{x(x+1)-(x+a)(2x+1)}{(x(x+1))^2} = \frac{(2a-1)x + a}{(x(x+1))^2}$

$a \leq 0$이므로 $f''(x) < 0$ 이고, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) > 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 1)에 의해 $f(x) < 1$.

따라서 $p(x) = e^{f(x)} < e^1 = e$ $(x > 0)$

[별해1] 앞의 풀이에서 $a = 0$이면 $f''(x) = \frac{-x}{(x(x+1))^2} < 0$이고, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $f'(x) > 0$

[문제 1-1] (1)에서 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$이고 명제 1)에 의해 $(1+\frac{1}{x})^x < e$.

이제 $a \leq 0$이면 $p(x) = (1+\frac{1}{x})^x(1+\frac{1}{x})^a < e\times(1+\frac{1}{x})^a \leq e\times 1 = e$

[문제 1-3] 제시문 (나)에서 $0 < a < \frac{1}{2}$일 때 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) $p(x_0)$가 $p(x)$의 최솟값이 되는 양수 x_0가 단 하나 존재하고 $0 < p(x_0) < e$ 임을 보이시오.

[풀이] $f''(\frac{a}{1-2a}) = 0$이고 부호가 $+$에서 $-$로 변하므로

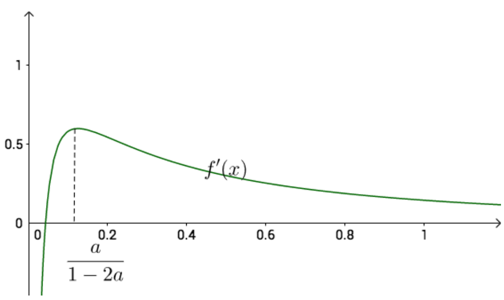
$f'(\frac{a}{1-2a}) = \ln(\frac{1-a}{a}) - 2(1-2a)$는 유일한 극값이고 극댓값. $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ 이므로

$f'(\frac{a}{1-2a}) = \ln(\frac{1-a}{a}) - 2(1-2a) > 0$임은 분명하다.

$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+a}{x+1} - 1 - \ln x - \frac{a}{x}$에서

$g(t) = \ln t - at = t(\frac{\ln t}{t} - a)$ 를 생각하면

$\lim_{t\to\infty} g(t) = -\infty$ 이므로 $\lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$ 이므로 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서 사이값 정리에 의해 구간 $(0, \frac{a}{1-2a})$에 $f'(x_0) = 0$되는 점 x_0가 존재한다. 이 점에서의 $f'(x)$

의 부호는 $-$ 에서 $+$로 변하고 유일한 극값이므로 $x = x_0$에서 최솟값을 갖는다.

(2) (6점) x_0가 부등식 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0 < \frac{a}{1-2a}$를 만족함을 보이시오.

[풀이] $f'(\frac{a^2}{1-2a}) = \ln(1+\frac{1-2a}{a^2}) - \frac{\frac{a^2}{1-2a}+a}{\frac{a^2}{1-2a}(1+\frac{a^2}{1-2a})}$

$= \ln\frac{(a-1)^2}{a^2} - (1-2a)\frac{a^2+a(1-2a)}{a^2(a-1)^2} = 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{a(1-a)}{a^2(a-1)^2}$

$= 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{1}{a(1-a)}$ 이므로

$h(a) = 2\ln\frac{1-a}{a} - (1-2a)\frac{1}{a(1-a)}$라 두고 미분하면

$h'(a) = 2(\frac{-1}{1-a} - \frac{1}{a}) - \frac{-2a(1-a)-(1-2a)^2}{(a(1-a))^2} = 2\frac{-a-1+a}{a(1-a)} - \frac{-2a(1-a)-(1-2a)^2}{(a(1-a))^2}$

$= \frac{-2}{a(1-a)} - \frac{-2a^2+2a-1}{(a(1-a))^2}$

$= \frac{-2a(1-a)+2a^2-2a+1}{(a(1-a))^2} = \frac{(2a-1)^2}{(a(1-a))^2} > 0$이고 $h(\frac{1}{2}) = 0$이므로

모든 a $(0 < a < \frac{1}{2})$에 대하여 $h(a) < 0$이고 $f'(\frac{a^2}{1-2a}) < 0$.

따라서 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0$.

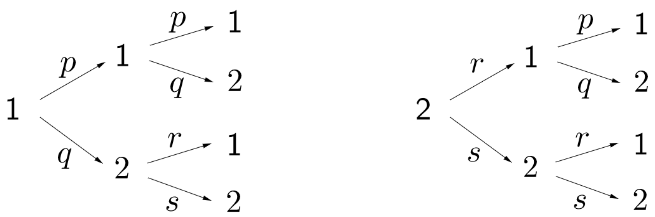
[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 약용이네는 매일 오후 6시가 되면 집에서 식사(E_1)를 하거나 외식(E_2)을 한다. 내일부터는 매일 저녁 식사를 다음 표의 규칙에 따라 E_1 또는 E_2을 선택한다. p, q는 양수이고 r, s는 음이 아닌 실수이며 $p+q=1$, $r+s=1$을 만족한다.

2일 식사	확률
E_1 다음에 E_1	p
E_1 다음에 E_2	q
E_2 다음에 E_1	r
E_2 다음에 E_2	s

[표1]

(나) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 두 번 적용한 아래의 수형도는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사의 모든 가능한 경우들을 표현한다.



예를 들면 $1\xrightarrow{p}1\xrightarrow{q}2$는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사가 E_1, E_1, E_2 인 것을 표현하며 그 확률은 $E_1 \rightarrow E_1$의 확률과 $E_1 \rightarrow E_2$의 확률의 곱인 $p \times q$가 된다고 하자. 나머지 경우들의 확률도 비슷하게 확률의 곱으로 얻어진다고 하면 우리는 다음의 표를 얻게 된다.

3일 식사	확률
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$p \times p + q \times r$
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$p \times q + q \times s$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$r \times p + s \times r$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$r \times q + s \times s$

[표2]

(다) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 n번 적용하고 제시문 (나)와 같이 확률을 구해나갈 때, 오늘 저녁 식사가 E_1일 경우 n일($n=1,2,\cdots$) 이후 저녁 식사가 E_1일 확률을 a_n, E_2일 확률을 b_n이라고 표시하고, 오늘 저녁 식사가 E_2일 경우 n일($n=1,2,\cdots$) 이후 저녁 식사가 E_1일 확률을 c_n, E_2일 확률을 d_n이라고 표시하자. 예를 들어 [표1]의 확률들은 a_1, b_1, c_1, d_1이고 [표2]에 계산된 확률들은 a_2, b_2, c_2, d_2이다.

(라) 실수 x, y와 자연수 n에 대하여 다음의 이항정리가 성립한다.

$$(x+y)^n = {}_n\mathrm{C}_0 x^n y^0 + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^0 y^n.$$

[문제 2-1] 제시문 (가)~(다)에서 $p=s, q=r$이라고 하자.

(1) (5점) a_3, b_3을 구하시오.

[풀이1] 제시문 (나)에 의해 $a_3 = a_2 p + b_2 q = (p^2 + q^2)p + (2pq)q = p^3 + 3pq^2$,

$b_3 = a_2 q + b_2 p = (p^2 + q^2)q + (2pq)p = 3p^2 q + q^3$

[풀이2] $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1$$

네 가지이며 그 확률들의 합인 a_3은 $p^3 + 3pq^2$ 이다. 또한 $E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2, \quad E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2 \rightarrow E_2$$

네 가지이며 그 확률들의 합인 b_3은 $3p^2 q + q^3$ 이다.

(2) (7점) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = d_n$, $b_n = c_n$임을 보이시오.

[풀이1] 수학적 귀납법을 사용한다.

$a_1 = p = s = d_1$, $b_1 = q = r = c_1$

만일 $a_n = d_n, b_n = c_n$이라면

$a_{n+1} = a_n \cdot p + b_n \cdot q = d_n \cdot p + c_n \cdot q = c_n \cdot q + d_n \cdot p = d_{n+1}$

$b_{n+1} = a_n \cdot q + b_n \cdot p = d_n \cdot q + c_n \cdot p = c_n \cdot p + d_n \cdot q = c_{n+1}$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = d_n$, $b_n = c_n$

[풀이2] 오늘 E_2로 시작하여 n일 후에 E_2가 되는 경우들은 오늘 E_1로 시작하여 n일 후에 E_1이 되는 경우들에서 E_1대신 E_2, E_2대신 E_1으로 바꾼 경우들과 같다 (1대1대응). 한편 이 문제에서 $E_1 \rightarrow E_1$의 확률과 $E_2 \rightarrow E_2$의 확률이 같고, $E_1 \rightarrow E_2$의 확률(q)과 $E_2 \rightarrow E_1$($r = q$)의 확률이 같기 때문에 a_n은 d_n과 같다. 같은 이유로 b_n과 c_n은 같다.

[문제 2-2] 제시문 (가)~(다)에서 $p = s, q = r$이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_n이 다음 합

$${}_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0 + {}_n\mathrm{C}_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, p^1 q^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, p^0 q^n$$

의 홀수 번째 항들의 합 ${}_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0 + {}_n\mathrm{C}_2\, p^{n-2} q^2 + n\mathrm{C}_4\, p^{n-4} q^4 + \cdots$이 됨을 보이시오.

[풀이1] a_n 이 나오는 경우는 다음과 같다.

$E_1 \rightarrow$(모두다 E_1)$\rightarrow E_1$ 한가지(${}_n\mathrm{C}_0$) 이며 각각 확률은 p^n 이므로 ${}_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0$

$E_1 \rightarrow (E_1 \rightarrow E_2$한번$, E_2 \rightarrow E_1$한번$,$나머지는 전날과 같게 선택$) \rightarrow E_1$

${}_nC_2$가지이며 각각의 확률은 $p^{n-2}q^2$이므로 ${}_nC_2\, p^{n-2}q^2$ ($E_1 \to E_1$의 확률과 $E_2 \to E_2$의 확률이 같음에 유의)
$E_1 \to (E_1 \to E_2$두번, $E_2 \to E_1$두번, 나머지는 전날과 같게 선택$) \to E_1$
${}_nC_4$가지이며 각각의 확률은 $p^{n-4}q^4$이므로 ${}_nC_4\, p^{n-4}q^4$ ($E_1 \to E_1$의 확률과 $E_2 \to E_2$의 확률이 같음에 유의)
(생략가능)
이렇게 확률을 구해가면 결국 a_n은 주어진 이항정리의 홀수 번째 항들의 합이다.

[풀이2] $a_{n+1} = a_n \cdot p + b_n \cdot q$에서 $b_n = \dfrac{a_{n+1} - pa_n}{q}$ 를 얻고 $b_{n+1} = a_n \cdot q + b_n \cdot p$에 대입하면

$\dfrac{a_{n+2} - pa_{n+1}}{q} = qa_n + p \cdot \dfrac{a_{n+1} - pa_n}{q}$ 정리하면

$a_{n+2} = 2pa_{n+1} + ((1-p)^2 - p^2)\, a_n = 2pa_{n+1} + (1-2p)a_n$

이제 $a_{n+2} - a_{n+1} = (2p-1)(a_{n+1} - a_n)$ 에서

$a_{n+2} - a_{n+1} = (2p-1)^n (a_2 - a_1) = (2p-1)^n (p^2 + (1-p)^2 - p) = -(1-p)(2p-1)^{n+1}$

그러므로 $a_n = a_{n-1} + (p-1)(2p-1)^{n-1} = a_{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-1} = \cdots$

$= a_1 + (p-1)(2p-1)^1 + \cdots + (p-1)(2p-1)^{n-2} + (p-1)(2p-1)^{n-1}$

$= p + (p-1)(2p-1)\dfrac{1-(2p-1)^{n-1}}{1-(2p-1)} = p - \dfrac{2p-1}{2}(1-(2p-1)^{n-1})$

$= \dfrac{1+(2p-1)^n}{2} = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$

이제 $\dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} = \dfrac{1}{2}\{ {}_nC_0\, p^n q^0 + {}_nC_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} p^1 q^{n-1} + {}_nC_n\, p^0 q^n +$

${}_nC_0\, p^n(-q)^0 + {}_nC_1\, p^{n-1}(-q)^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} p^1(-q)^{n-1} + {}_nC_n\, p^0(-q)^n \}$

에서 a_n은 ${}_nC_0\, p^n q^0 + {}_nC_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_nC_{n-1} p^1 q^{n-1} + {}_nC_n\, p^0 q^n$의 홀수 번째 항들의 합과 같다.

(2) (8점) 이 경우 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하시오.

[풀이] 주어진 이항정리는 $(p+q)^n = 1$이고 $a_n + b_n = 1$이기 때문에 b_n은 이항정리의 짝수 번째 항들의 합과 같다. 홀수 번째 항들의 합은 $\dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} = \dfrac{1+(p-q)^n}{2}$의 전개를 통해 얻을 수 있기 때문에 $a_n = \dfrac{1+(p-q)^n}{2}$이다. $p - q = p - (1-p) = 2p-1$이고, $0 < p < 1$ 이므로 $-1 < 2p-1 < 1$ 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$이다. 짝수 번째 항들의 합은 $\dfrac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} = \dfrac{1-(p-q)^n}{2}$의 전개를 통해 얻을 수 있기 때문에 $b_n = \dfrac{1-(p-q)^n}{2}$이고 위와 비슷하게 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$이다.

($1 = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$을 이용하여 b_n의 극한값을 얻을 수도 있다.)

[문제 2-3] 제시문 (가)~(다)에서 $r = 1$, $s = 0$이라고 하자.
(1) (8점) 확률 a_2, b_2, a_3, b_3을 q에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

[풀이] a_2. $E_1 \to \bigcirc \to E_1$ 의 확률인 a_2는 [표2]에 의하여 $p^2+q=(1-q)^2+q=1-q+q^2$이다.

b_2. $E_1 \to \bigcirc \to E_2$ 의 확률인 b_2는 [표2]에 의하여 $pq=(1-q)q=q-q^2$이 된다.

a_3. 비슷하게 $E_1 \to \bigcirc \to \bigcirc \to E_1$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_1,\quad E_1 \to E_1 \to E_2 \to E_1,\quad E_1 \to E_2 \to E_1 \to E_1,\quad E_1 \to E_2 \to E_2 \to E_1$$

이며 그 확률들의 합인 a_3은

$p \cdot p \cdot p + p \cdot q \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot p + q \cdot 0 \cdot 1$

$=p^3+2pq$

$=(1-q)^3+2(1-q)q$

$=1-q+q^2-q^3$

b_3. 비슷하게 $E_1 \to \bigcirc \to \bigcirc \to E_2$ 의 모든 가능한 경우는

$$E_1 \to E_1 \to E_1 \to E_2,\quad E_1 \to E_1 \to E_2 \to E_2,\quad E_1 \to E_2 \to E_1 \to E_2,\quad E_1 \to E_2 \to E_2 \to E_2$$

이며 그 확률들의 합인 b_3은

$p \cdot p \cdot q + p \cdot q \cdot 0 + q \cdot 1 \cdot q + q \cdot 0 \cdot 0$

$=p^2q+q^2$

$=(1-q)^2q+q^2$

$=q-q^2+q^3$

(2) (8점) 확률 a_n, b_n의 일반항을 q에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

[풀이] 위의 논제를 이어 계속 추론해가면

$$a_n = 1+(-q)+(-q)^2+\cdots+(-q)^n,\ b_n = -\{(-q)+(-q)^2+\cdots+(-q)^n\}$$

이 됨을 추측할 수 있다.

(참고) **[문제 2-2]**의 풀이와 비슷하게 추론해갈 경우

$$a_n = {}_n\mathrm{C}_0\, p^n + {}_{n-1}\mathrm{C}_1\, p^{n-2}q^1 + {}_{n-2}\mathrm{C}_2\, p^{n-4}q^2 + \cdots,$$

$$b_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_0\, p^{n-1}q + {}_{n-2}\mathrm{C}_1\, p^{n-3}q^2 + \cdots$$

까지는 얻을 수 있지만 q의 오름차순 전개가 매우 어렵다.

(3) (6점) 이 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n$ 의 값을 구하시오.

[풀이] 등비급수의 공식에 의하여 $a_n = \dfrac{1-(-q)^{n+1}}{1+q}$, $b_n = -\dfrac{(-q)(1-(-q)^n)}{1+q}$이 되고 그 극한 값들은 각각 $\dfrac{1}{1+q}$, $\dfrac{q}{1+q}$이다.