2017학년도 논술고사

자연계열(오전)

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 3

2017학년도 자연계열(오전) 논술고사

자연계열 (오전)

[문항1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 자연로그의 밑 e가 계산된 최초의 기록은 1618년 존 네이피어에 의해 발간된 로그표이다. 그러나 네이피어는 로그 계산의 과정에서 나온 결과 값만을 간단히 다루었을 뿐 자연로그의 밑을 상수로 취급하지는 않았다. 야코프 베르누이는 복리 이자의 계산에서 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$의 극한값이 수렴함을 발견하였으며, 오일러는 1727년과 1728년 사이에 이 극한값을 e로 표현하였다.

(나) 실수 a에 대하여 함수 $p(x) = (1+\frac{1}{x})^{x+a}$ $(x > 0)$는 a값과 관계없이 "$\lim_{x\to\infty} \ln p(x) = 1$"이고 $\lim_{x\to\infty} p(x) = e$가 된다. 따라서 실수 a가 주어질 때 마다 함수 $p(x)$와 상수 $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$을 비교할 수 있다.

(다) 우리는 극한과 도함수의 성질을 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있다. 예를 들면 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 일 때, 다음 두 명제가 성립한다.

명제 1) 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) > 0$이면, 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) < 0$
명제 2) 모든 $x > 0$에 대하여 $f'(x) < 0$이면, 모든 $x > 0$에 대하여 $f(x) > 0$

(라) **평균값 정리:** 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[문제 1-1] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (8점) '**평균값정리를 함수** $\ln x$**에 적용하여**' a값과 관계없이 $\lim_{x\to\infty} \ln p(x) = 1$임을 보이시오.

(2) (8점) 제시문 (다)의 명제 1)을 증명하시오.

[문제 1-2] 제시문 (나)와 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

(1) (9점) $a \geq \frac{1}{2}$인 a에 대하여 $p(x) > e$ $(x > 0)$임을 보이시오.

(2) (9점) $a \leq 0$인 a에 대하여 $p(x) < e$ $(x > 0)$임을 보이시오.

[문제 1-3] 제시문 (나)에서 $0 < a < \frac{1}{2}$일 때 다음 논제에 답하시오.

(1) (10점) $p(x_0)$가 $p(x)$의 최솟값이 되는 양수 x_0가 단 하나 존재하고 $0 < p(x_0) < e$ 임을 보이시오.

(2) (6점) x_0가 부등식 $\frac{a^2}{1-2a} < x_0 < \frac{a}{1-2a}$를 만족함을 보이시오.

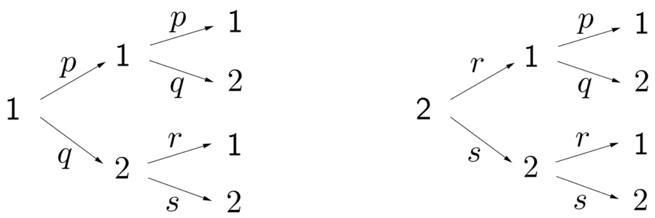
[문항2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 약용이네는 매일 오후 6시가 되면 집에서 식사(E_1)를 하거나 외식(E_2)을 한다. 내일부터는 매일 저녁 식사를 다음 표의 규칙에 따라 E_1 또는 E_2을 선택한다. p, q는 양수이고 r, s는 음이 아닌 실수이며 $p+q=1$, $r+s=1$을 만족한다.

2일 식사	확률
E_1 다음에 E_1	p
E_1 다음에 E_2	q
E_2 다음에 E_1	r
E_2 다음에 E_2	s

[표1]

(나) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 두 번 적용한 아래의 수형도는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사의 모든 가능한 경우들을 표현한다.



예를 들면 $1 \xrightarrow{p} 1 \xrightarrow{q} 2$는 오늘, 내일, 모레 저녁 식사가 E_1, E_1, E_2 인 것을 표현하며 그 확률은 $E_1 \rightarrow E_1$의 확률과 $E_1 \rightarrow E_2$의 확률의 곱인 $p \times q$가 된다고 하자. 나머지 경우들의 확률도 비슷하게 확률의 곱으로 얻어진다고 하면 우리는 다음의 표를 얻게 된다.

3일 식사	확률
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$p \times p + q \times r$
$E_1 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$p \times q + q \times s$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_1$	$r \times p + s \times r$
$E_2 \rightarrow \bigcirc \rightarrow E_2$	$r \times q + s \times s$

[표2]

(다) 제시문 (가)의 규칙을 연속으로 n번 적용하고 제시문 (나)와 같이 확률을 구해나갈 때, 오늘 저녁 식사가 E_1일 경우 n일($n=1,2,\cdots$) 이후 저녁 식사가 E_1일 확률을 a_n, E_2일 확률을 b_n이라고 표시하고, 오늘 저녁 식사가 E_2일 경우 n일($n=1,2,\cdots$) 이후 저녁 식사가 E_1일 확률을 c_n, E_2일 확률을 d_n이라고 표시하자. 예를 들어 [표1]의 확률들은 a_1, b_1, c_1, d_1이고 [표2]에 계산된 확률들은 a_2, b_2, c_2, d_2이다.

(라) 실수 x, y와 자연수 n에 대하여 다음의 이항정리가 성립한다.

$$(x+y)^n = {}_n\mathrm{C}_0 x^n y^0 + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} y^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^1 y^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^0 y^n.$$

[문제 2-1] 제시문 (가)~(다)에서 $p=s, q=r$이라고 하자.

(1) (5점) a_3, b_3을 구하시오.

(2) (7점) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = d_n$, $b_n = c_n$임을 보이시오.

[문제 2-2] 제시문 (가)~(다)에서 $p=s, q=r$이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_n이 다음 합

$$ {}_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0 + {}_n\mathrm{C}_1\, p^{n-1} q^1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\, p^1 q^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n\, p^0 q^n $$

의 첫 번째, 세 번째,⋯ 항들의 합 ${}_n\mathrm{C}_0\, p^n q^0 + {}_n\mathrm{C}_2\, p^{n-2} q^2 + n\mathrm{C}_4\, p^{n-4} q^4 + \cdots$이 됨을 보이시오.

(2) (8점) 이 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하시오.

[문제 2-3] 제시문 (가)~(다)에서 $r=1$, $s=0$이라고 하자.

(1) (8점) 확률 a_2, b_2, a_3, b_3을 q에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

(2) (8점) 확률 a_n, b_n의 일반항을 q에 대한 다항식으로 나타내시오. (단, 오름차순으로 나타내시오.)

(3) (6점) 이 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하시오.