자연계열(오후, 의학과)

2017학년도 논술고사

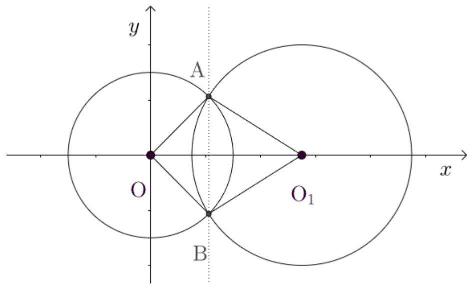
자연계열(의학과) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 :7

[문항1] <50점> 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

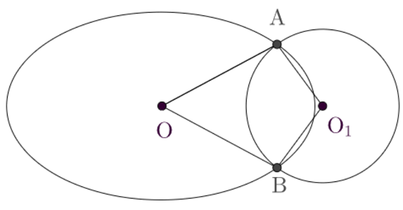
(가) 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 것은 그리스 시대 수학자들의 연구와 관련이 있다. 'Ellipse', 'Parabola', 'Hyperbola' 는 각각 그리스어 '모자라다','적당하다','초과하다'는 뜻을 가지고 있으며 원뿔의 단면과 밑면이 이루는 각과 모서리와 밑면이 이루는 각 사이의 관계와 관련이 있다. 이런 이차곡선은 산업현장에서 다양하게 사용되고 있으며 **이차곡선들의 교점과 관련된 문제**는 수학 이외의 분야에서 자주 나타나고 있다.

(나) 원 $x^2+y^2=r_1^2$과 원 $(x-d)^2+y^2=r_2^2$이 그림과 같이 만나고 있다. (단, $r_1^2+r_2^2 \le d^2$)

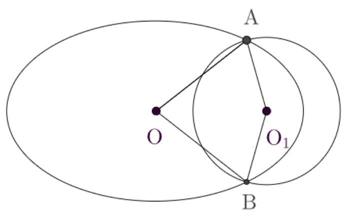


[그림 1]

(다) 타원과 원의 교점이 2개인 경우, [그림 2]처럼 교점 두 개와 원의 중심 O_1을 잇는 두 선분(선분 AO_1와 BO_1)이 각각 타원과 두 점에서 만나거나 [그림 3]처럼 교점 두 개와 점 O를 잇는 두 선분(선분 AO와 BO)이 각각 원과 두 점에서 만날 수도 있다.



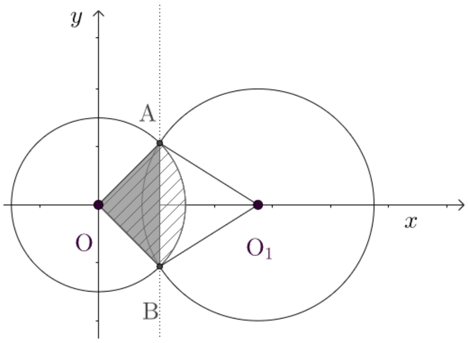
[그림 2]



[그림 3]

[문제 1-1] (7점) 제시문 (나)에서 두 원의 교점을 A, B라 하고, $\theta_1 = \angle \mathrm{AOB}$, $\theta_2 = \angle \mathrm{AO_1B}$라 할 때 두 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 θ_1과 θ_2로 나타내시오.

[풀이] 빗금친 부분의 넓이는 부채꼴 ABO의 넓이에서 삼각형 ABO의 넓이를 빼면 되므로



$\frac{1}{2}r_1^2\theta_1 - \frac{1}{2}r_1^2\sin\theta_1 = \frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1)$

비슷하게 반대쪽 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$

따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2^2(\theta_2 - \sin\theta_2)$

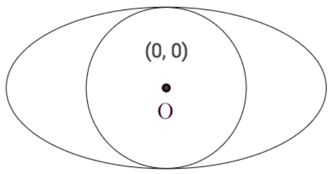
또는 만약 $r_1^2 + r_2^2 = d^2$이면 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\frac{1}{2}r_1^2(\theta_1 - \sin\theta_1) + \frac{1}{2}r_2^2(\pi - \theta_1 - \sin\theta_1)$ 등 다양한 답의 꼴이 나올 수도 있다.

[문제 1-2] 제시문 (다)를 읽고 다음 논제에 답하시오.

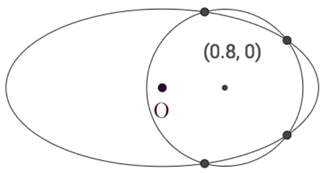
(1) (12점) 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$의 교점의 개수를 d에 따라 구하고 그 근거를 보이시오. (단, $d \geq 0$)

[풀이] 두 식 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 $(x-d)^2 + y^2 = 1$을 연립하면 $\frac{x^2}{4} = 1 - y^2 = (x-d)^2$이므로 $\pm\frac{x}{2} = x - d$. 따라서 $x = 2d$일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다.

① $d = 0$ 일 때 두 근이 일치하므로 중근이고 교점의 개수는 2

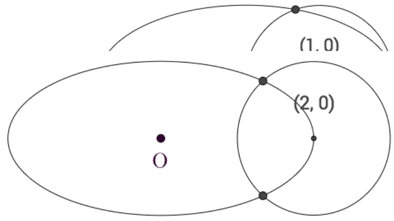


② $0 < d < 1$일 때 $x = 2d$와 $x = \frac{2}{3}d$ 둘 다 근이 될 수 있고 교점의 개수는 4

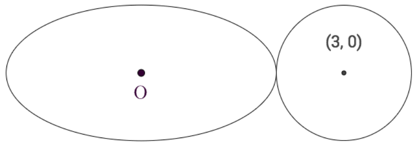


③ $d = 1$일 때 $x = 2d$일 때 $y = 0$이 되어 한 점이 되므로 교점의 개수는 3

④ $1 < d < 3$일 때 $x = \frac{2}{3}d$ 만 근이 될 수 있고 교점의 개수는 2



⑤ $d = 3$일 때 $x = \frac{2}{3}d$ 일 때 $y = 0$이 되어 한 점이 되므로 교점의 개수는 1



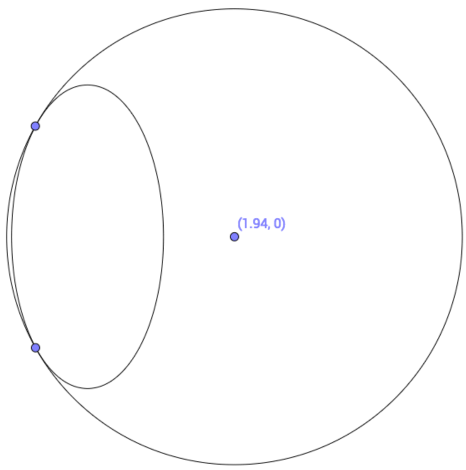
⑥ $d > 3$일 때 $x = 2d$와 $x = \frac{2}{3}d$ 둘 다 근이 안되므로 교점은 없다.

(2) (9점) 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 3^2$의 교점의 개수를 d에 따라 구하시오. (단, $d \geq 0$)

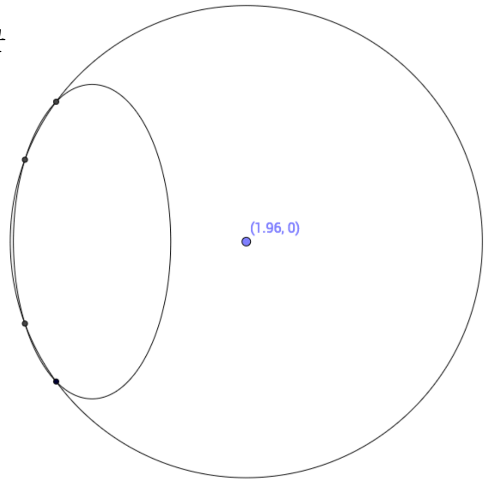
[풀이] 두 식 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$과 $(x-d)^2 + y^2 = 3^2$을 연립하면 $4(1-x^2) = y^2 = 9 - (x-d)^2$에서 $3x^2 + 2dx - d^2 + 5 = 0$을 얻는다. 이 식의 판별식 $D/4 = d^2 - 3(-d^2+5) = 4d^2 - 15$이고, 근은 $x = \frac{-d \pm \sqrt{4d^2 - 15}}{3}$이다. 이제 $x = \frac{-d \pm \sqrt{4d^2 - 15}}{3}$일 때 $y^2 = \frac{96 - 20d^2 \pm 8d\sqrt{4d^2 - 15}}{9}$에서 교점을 구할 수 있다. $y = 0$되는 점을 구하면 $9d^4 - 180d^2 + 576 = 0$에서 $d = 2$ 또는 $d = 4$ 중근이 되는 위치를 구하기 위해 판별식 $D/4 = 4d^2 - 15 = 0$에서 $d = \frac{\sqrt{15}}{2}$를 얻는다.

① $0 \leq d < \frac{\sqrt{15}}{2}$ 일 때 판별식이 $D/4 = 4d^2 - 15 < 0$ 이므로 교점은 없다.

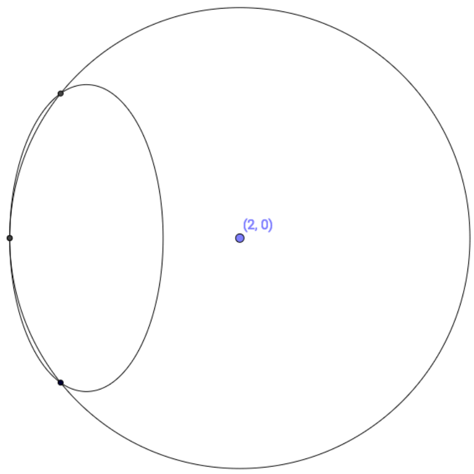
② $d = \frac{\sqrt{15}}{2}$일 때 $x = -\frac{\sqrt{15}}{6}$가 중근이 될 수 있고, 대응되는 y의 근은 2개가 되어 교점의 개수는 2



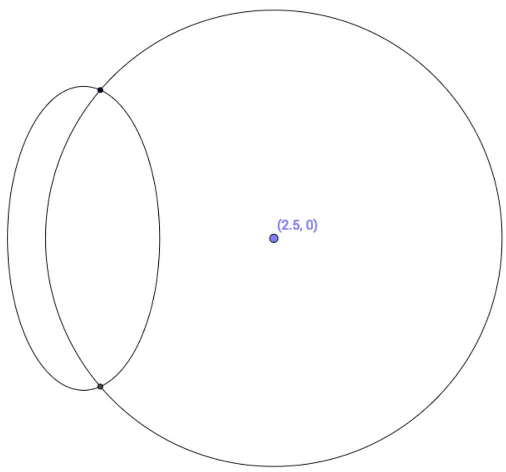
③ $\dfrac{\sqrt{15}}{2} < d < 2$일 때 $x = \dfrac{-d \pm \sqrt{4d^2 - 15}}{3}$ 의 두 개의 근을 갖게 되고, 대응되는 y의 근이 4개가 되어 교점의 개수는 4



④ $d = 2$일 때 $x = -1$과 $x = -\dfrac{1}{3}$ 의 두 개의 근을 갖게 되어있고, $x = -1$에 대응하는 y의 근은 중근이므로 교점의 개수는 3

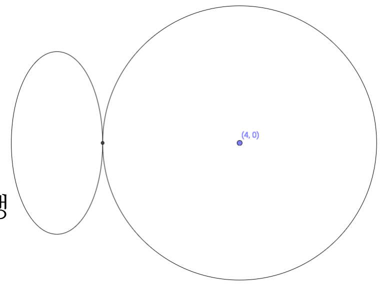


⑤ $2 < d < 4$일 때 x 근 한 개, 대응하는 y근 두 개가 되어 교점의 개수는 2



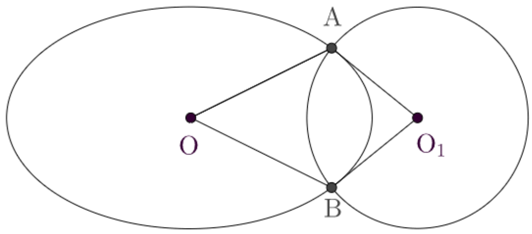
⑥ $d = 4$ 한 점에서만 접하므로 교점의 개수는 1

⑦ $d > 4$일 때 두 곡선이 만나지 않으므로 교점은 없다.



[문제 1-3] 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 원 $(x-d)^2 + y^2 = 1$ $(d \geq 0)$을 생각하자.

(1) (12점) 제시문 (다)에서 나타나는 경우와는 다르게 사각형 OAO_1B가 **'타원과 원에 의해 동시에 둘러싸인 영역'**을 포함하도록 하는 값 d의 범위를 구하시오.



[풀이] 두 식 ① $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$과 ② $(x-d)^2 + y^2 = 1$을 연립하면 $\frac{x^2}{4} = 1 - y^2 = (x-d)^2$이므로 $\pm\frac{x}{2} = x - d$. 따라서 $x = 2d$일 때 $y = \sqrt{1-d^2}$ 과 $x = \frac{2}{3}d$일 때 $y = \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}$ 가 교점이 될 수 있다. 그리고 교점이 2개인 경우는 $1 < d < 3$일 때 이므로 A와 B의 x좌표는 $\frac{2}{3}d$

(i) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$의 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의 접선식은 $\frac{2d}{3} \cdot \frac{x}{4} + \sqrt{1-\frac{d^2}{9}} \cdot y = 1$에서 $y = -\frac{d}{6\sqrt{1-d^2/9}}x + \frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$. 이 식에서 $x = d$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y = \frac{-d^2+6}{6\sqrt{1-d^2/9}} \leq 0$ 따라서 $d \geq \sqrt{6}$

(ii) $(x-d)^2 + y^2 = 1$의 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9})$ 에서의 접선식은 $(\frac{2}{3}d - d)(x-d) + \sqrt{1-\frac{d^2}{9}}\, y = 1$에서

$$y = \frac{\frac{d}{3}(x-d)}{\sqrt{1-d^2/9}} + \frac{1}{\sqrt{1-d^2/9}}$$

이 식에서 $x = 0$일 때 y는 양이 아닌 실수이어야 하므로 $y = \frac{-d^2+3}{3\sqrt{1-d^2/9}} \leq 0$ 따라서 $d \geq \sqrt{3}$

결국 $\sqrt{6} \leq d < 3$

(참고) $d = \sqrt{6}$일 때 AO_1은 타원의 접선이지만 AO는 원의 접선이 아니다.

[별해] 기울기를 비교할 수도 있다.

(i) 선분 OA의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}}$이고 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9}\,)$ 에서의

$(x-d)^2 + y^2 = 1$의 접선의 기울기는$\dfrac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 그림과 같이 나타나려면 $\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{2d}{3}} \le \dfrac{\frac{d}{3}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

이제 $1-\dfrac{d^2}{9} \le \dfrac{2d^2}{9}$ 이므로 $d \ge \sqrt{3}$

(ii) 선분 O_1A의 기울기는 $\dfrac{0-\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{d-\frac{2d}{3}}$이고 점 $P(2d/3, \sqrt{1-d^2/9}\,)$ 에서의

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$의 접선의 기울기는$\dfrac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$ 그림과 같이 나타나려면 $-\dfrac{\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}{\frac{d}{3}} \ge \dfrac{-d}{6\sqrt{1-\frac{d^2}{9}}}$

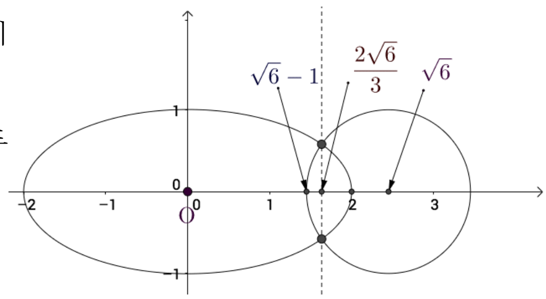
이제 $6(1-\dfrac{d^2}{9}) \le \dfrac{d^2}{3}$ 이므로 $d \ge \sqrt{6}$

(i), (ii)를 동시에 만족하는 영역은 $\sqrt{6} \le d < 3$.

(2) (10점) 위에서 구한 d의 값 중 가장 작은 값에 대하여, 타원과 원에 의하여 동시에 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라. (단, 필요하면 $\theta_1 = \angle AOB$과 $\theta_2 = \angle AO_1B$를 사용하여 넓이를 표시할 수 있다.)

[풀이] 위에서 구한 d의 값 중 가장 작은 값은 $d = \sqrt{6}$이다.

식 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$와 식 $(x-\sqrt{6})^2 + y^2 = 1$을 연립하면 두 점 $\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$을 얻는다. 그림에서



$$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx + 2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx$$

먼저 $2\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx$ 를 계산하자. $\dfrac{x}{2} = \sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$로 치환하고 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$라 하면

$$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\, d\theta = 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = [2\theta + \sin 2\theta]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2\alpha - \sin 2\alpha$$

여기에서 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{1-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = \pi - 2\alpha - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이제 $2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx$를 계산하자. $x - \sqrt{6} = \sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$로 치환하고 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$라 하면

$$2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} \cos^2\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = [\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\alpha}$$

$= \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이제 $2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$2\int_{\frac{2\sqrt{6}}{3}}^{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx + 2\int_{\sqrt{6}-1}^{\frac{2\sqrt{6}}{3}} \sqrt{1-(x-\sqrt{6})^2}\,dx = \pi - 2\alpha - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \sqrt{2} - 3\alpha = \frac{3\pi}{2} - \sqrt{2} - \frac{3(\pi - \theta_2)}{2} = \frac{3\theta_2}{2} - \sqrt{2}$$

(단, $2\alpha + \theta_2 = \pi$이므로 $\alpha = \frac{\pi - \theta_2}{2}$)

(참고) $\sin(\frac{\theta_2}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\sin\theta_2 = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{3}} = 2\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\sin(\frac{\theta_1}{2}) = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{((\frac{2\sqrt{6}}{3})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$이므로

$$\sin\theta_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{9}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

[문항2] 채점기준 참고