2026학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제[창의인재]

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

두 개의 함수 $f(x)$, $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

(가) $f(x)=\begin{cases} 2x-2 & (0 \le x < 2) \\ axe^{bx} & (2 \le x \le 4) \end{cases}$

(나) $g(x)=|(x-1)(x-3)|-5 \quad (0 \le x \le 4)$

(다) a,b는 상수이다.

[문제 1-1] 함수 $f(x)$가 구간 $(0,4)$에서 미분가능할 때 a, b를 구하시오. (10점)

[문제 1-2] (문제 1-1)에서 구한 a, b에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (20점)

[출제의도]

함수의 연속, 미분계수, 미분가능 등의 의미를 이해하고 이를 이용해 지수함수의 극한,적분 및 이를 활용한 부분적분법의 수행능력과 이를 활용한 좌표평면상 곡선으로 둘러싸인 그래프의 넓이를 구하는 방법에 대한 이해여부를 평가하고하 하였다.

[문항해설]

(문제 1-1)

구간 $(0,4)$에서 미분가능 하려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$2\times2-2=a\times2\times e^{2b},\ 1=ae^{2b}$

$x=2$에서 좌미분계수와 우미분계수를 구한다.

좌미분계수:

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(2\times(2+h)-2)-(2\times2-2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{2h}{h}=2$$

우미분계수:

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{a(2+h)e^{b(2+h)}-a(2)e^{b(2)}}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2ae^{b(2+h)}+ahe^{b(2+h)}-2ae^{2b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{2ae^{2b}(e^{bh}-1)+ahe^{2b}e^{bh}}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{2ae^{2b}(e^{bh}-1)+ahe^{2b}e^{bh}}{h}$$

$$=2ae^{2b}\lim_{h\to0+}\frac{e^{bh}-1}{h}+\lim_{h\to0+}ae^{2b}e^{bh}=2abe^{2b}+ae^{2b}\quad\left(\because\lim_{h\to0+}\frac{e^{bh}-1}{bh}b=b\right).$$

구간 $(0,4)$에서 미분가능 하려면 좌비분계수와 우미분계수가 같아야 한다. $2=ae^{2b}+2abe^{2b}$

이로부터 a,b값을 구한다.

$2=1(1+2b)$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$1=ae^{2\times\frac{1}{2}}$이므로 $a=\frac{1}{e}$

(문제 1-2)

구간에 따라 $g(x)$를 구한다.

$x<1,\ x>3$인 경우, $g(x)=(x-1)(x-3)-5$이므로

$g(x)=x^2-4x+3-5=x^2-4x-2$

$1<x<3$인 경우, $g(x)=-(x-1)(x-3)-5$이므로

$g(x)=-x^2+4x-3-5=-x^2+4x-8$

적분구간을 4개로 나누어 적분한다.

$$\int_0^4(f(x)-g(x))dx=\int_0^1((2x-2)-(x^2-4x-2))dx+\int_1^2((2x-2)-(-x^2+4x-8))dx$$

$$+\int_2^3\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)-(-x^2+4x-8)\right)dx+\int_3^4\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)-(x^2-4x-2)\right)dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+6x)dx+\int_1^2(x^2-2x+6)dx$$

$$+\int_2^3\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)+x^2-4x+8\right)dx+\int_3^4\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)-x^2+4x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+6x\right]_1^2$$

$$+\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_2^3-\int_2^3 2e^{\frac{1}{2}(x-2)}dx+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+8x\right]_2^3$$

$$+\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_3^4-\int_3^4 2e^{\frac{1}{2}(x-2)}dx+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2+2x\right]_3^4$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+6x\right]_1^2$$

$$+\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_2^3-\left[4e^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_2^3+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+8x\right]_2^3$$

$$+\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_3^4-\left[4e^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_3^4+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2+2x\right]_3^4$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+3\right)+\left(\frac{8}{3}-4+12-(\frac{1}{3}-1+6)\right)$$

$$+\left(6e^{0.5}-4-(4e^{0.5}-4)+\frac{27}{3}-18+24-\left(\frac{8}{3}-8+16\right)\right)$$

$$+\left(8e-6e^{0.5}-(4e-4e^{0.5})-\frac{64}{3}+32+8-\left(-\frac{27}{3}+18+6\right)\right)$$

$$=4e+16$$

[예시답안]

(문제 1-1) 배점 10점

(정답) $a=\frac{1}{e},\ b=\frac{1}{2}$

(풀이)

구간 $(0,4)$에서 미분가능 하려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$2\times2-2=a\times2\times e^{2b},\ 1=ae^{2b}$

$x=2$에서 좌미분계수는

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{(2\times(2+h)-2)-(2\times2-2)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{2h}{h}=2$$

우미분계수는

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{a(2+h)e^{b(2+h)}-a(2)e^{b(2)}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2ae^{b(2+h)}+ahe^{b(2+h)}-2ae^{2b}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{2ae^{2b}(e^{bh}-1)+ahe^{2b}e^{bh}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{2ae^{2b}(e^{bh}-1)+ahe^{2b}e^{bh}}{h}$$

$$=2ae^{2b}\lim_{h\to 0+}\frac{e^{bh}-1}{h}+\lim_{h\to 0+}ae^{2b}e^{bh}=2abe^{2b}+ae^{2b}\quad\left(\because \lim_{h\to 0+}\frac{e^{bh}-1}{bh}b=b\right)$$

이다.

구간 $(0,4)$에서 미분가능 하려면 좌비분계수와 우미분계수가 같아야 하므오 $2=ae^{2b}+2abe^{2b}$

a,b값을 구하면

$2=1(1+2b)$이므로 $b=\frac{1}{2}$

$1=ae^{2\times\frac{1}{2}}$이므로 $a=\frac{1}{e}$

(문제 1-2) 배점 20점

(정답) $4e+16$

(풀이)

$x<1$, $x>3$인 경우, $g(x)=(x-1)(x-3)-5$이므로

$g(x)=x^2-4x+3-5=x^2-4x-2$

$1<x<3$인 경우, $g(x)=-(x-1)(x-3)-5$이므로

$g(x)=-x^2+4x-3-5=-x^2+4x-8$

적분구간을 4개로 나누어서 표현하면

$$\int_0^4(f(x)-g(x))dx=\int_0^1((2x-2)-(x^2-4x-2))dx+\int_1^2((2x-2)-(-x^2+4x-8))dx$$

$$+\int_2^3\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)-(-x^2+4x-8)\right)dx+\int_3^4\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)-(x^2-4x-2)\right)dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+6x)dx+\int_1^2(x^2-2x+6)dx$$

$$+\int_2^3\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)+x^2-4x+8\right)dx+\int_3^4\left(\left(xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right)-x^2+4x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+6x\right]_1^2$$

$$+\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_2^3-\int_2^3 2e^{\frac{1}{2}(x-2)}dx+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+8x\right]_2^3$$

$$+\left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)}\right]_3^4-\int_3^4 2e^{\frac{1}{2}(x-2)}dx+\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2+2x\right]_3^4$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 6x \right]_1^2$$

$$+ \left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)} \right]_2^3 - \left[4e^{\frac{1}{2}(x-2)} \right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x \right]_2^3$$

$$+ \left[2xe^{\frac{1}{2}(x-2)} \right]_3^4 - \left[4e^{\frac{1}{2}(x-2)} \right]_3^4 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 2x \right]_3^4$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) + \left(\frac{8}{3} - 4 + 12 - \left(\frac{1}{3} - 1 + 6\right) \right)$$

$$+ \left(6e^{0.5} - 4 - (4e^{0.5} - 4) + \frac{27}{3} - 18 + 24 - \left(\frac{8}{3} - 8 + 16 \right) \right)$$

$$+ \left(8e - 6e^{0.5} - (4e - 4e^{0.5}) - \frac{64}{3} + 32 + 8 - \left(-\frac{27}{3} + 18 + 6 \right) \right)$$

$$= 4e + 16$$

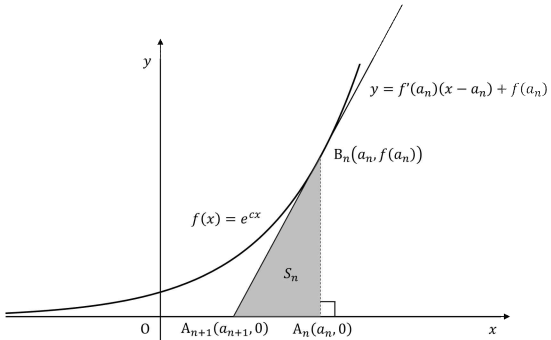
【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (45점)

(가) 점 $A_1(a_1,0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $f(x)=e^{cx}$ $(c>0)$과 만나는 점을 B_1이라고 하고, 이 곡선 위의 점 B_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $A_2(a_2,0)$라고 하자.

(나) 다음 그림과 같이, 모든 자연수 n에 대하여, 점 $A_n(a_n,0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $f(x)=e^{cx}$ $(c>0)$와 만나는 점을 $B_n(a_n,f(a_n))$이라고 하고, 이 곡선 위의 점 B_n에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $A_{n+1}(a_{n+1},0)$이라고 하자.

(다) 자연수 $N>1$에 대하여 $a_1=N$이다.

(라) S_n은 삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$의 넓이이다.



(문제 2-1) S_1을 구하시오. (10점)

(문제 2-2) S_n을 구하시오. (10점)

(문제 2-3) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$을 구하시오. (5점)

(문제 2-4) $c=1$인 경우, $f(a_n)<0.1$인 자연수 n의 최솟값을 N에 관한 식으로 표현하시오. (20점) (단, 자연상수 e는 2.7로 계산한다.)

[출제의도]

지수/로그함수의 접선의 방정식 및 도함수에 대한 이해도를 평가하고, 수열의 귀납적 정의 및 이를 통해 얻어진 등비급수에 대한 이해도를 평가하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 2-1)

$f(x)=e^{cx}$이므로 $f'(x)=ce^{cx}$

$\mathrm{A}_n(a_n,0)$에서 접선의 방정식은 $y=f'(a_n)(x-a_n)+f(a_n)$

이 함수의 x절편은 $0=f'(a_n)(a_{n+1}-a_n)+f(a_n)$로 부터 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$

따라서 $a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}=N-\dfrac{e^{cN}}{ce^{cN}}=N-\dfrac{1}{c}$

삼각형$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$의 밑변의 길이는 $|a_2-a_1|=\left|N-\dfrac{1}{c}-N\right|=\dfrac{1}{c}$이고,

높이는 $f(a_1)=f(N)=e^{cN}$이므로

$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$의 넓이($S_1$)는 $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{c}e^{cN}=\dfrac{e^{cN}}{2c}$

(문제 2-2)

$a_2=N-\dfrac{1}{c}$

$f(a_2)=f(N-\dfrac{1}{c})=e^{c\left(N-\frac{1}{c}\right)}$,

$$a_3=a_2-\frac{f(a_2)}{f'(a_2)}=\left(N-\frac{1}{c}\right)-\frac{e^{c\left(N-\frac{1}{c}\right)}}{ce^{c\left(N-\frac{1}{c}\right)}}=N-\frac{1}{c}-\frac{1}{c}=N-\frac{2}{c}$$

$f(a_3)=f(N-\dfrac{2}{c})=e^{c\left(N-\frac{2}{c}\right)}$, $a_4=a_3-\dfrac{f(a_3)}{f'(a_3)}=\left(N-\dfrac{2}{c}\right)-\dfrac{e^{c\left(N-\frac{2}{c}\right)}}{ce^{c\left(N-\frac{2}{c}\right)}}=N-\dfrac{2}{c}-\dfrac{1}{c}=N-\dfrac{3}{c}$

$f(a_4)=f(N-\dfrac{3}{c})=e^{c\left(N-\frac{3}{c}\right)}$

$\vdots$

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}=\left(N-\frac{n-1}{c}\right)-\frac{e^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}}{ce^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}}=N-\frac{n-1}{c}-\frac{1}{c}=N-\frac{n}{c}$$

$a_{n+1}=\left(N-\dfrac{n}{c}\right)$, $a_n=\left(N-\dfrac{n-1}{c}\right)$

삼각형 밑변의 길이는 $|a_{n+1}-a_n|=\left|\left(N-\dfrac{n}{c}\right)-\left(N-\dfrac{n-1}{c}\right)\right|=\dfrac{1}{c}$

높이는 $f(a_n)=e^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}$

삼각형의 넓이는 $S_n=\dfrac{1}{2}|(a_{n+1}-a_n)|f(a_n)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{c}e^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}=\dfrac{e^{cN-n+1}}{2c}$

(문제 2-3)

넓이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{cN-n+1}}{2c} = \frac{e^{cN+1}}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$는 첫 번째 항이 e^{-1}이고, 공비가 e^{-1}인 등비수열의 합이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$

등비수열의 합을 이용해 면적의 합을 구하면

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{e^{cN+1}}{2c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{cN+1}}{2c} \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e^{cN+1}}{2c(e-1)}$

(문제 2-4)

$f(a_n) = e^{c\left(N - \frac{n-1}{c}\right)}$에서 $c=1$이면,

$f(a_n) = e^{(N-n+1)}$이고,

$f(a_{n+1}) = e^{(N-(n+1)+1)} = e^{(N-n)}$이다.

이때 $n = N+1$이면

$f(a_{N+1}) = e^{(N-(N+1)+1)} = e^0 = 1$이다.

$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \frac{e^{(N-n)}}{e^{(N-n+1)}} = \frac{1}{e}$이므로 $f(a_{n+1}) = \frac{1}{e} f(a_n)$

따라서 $\frac{f(a_{N+2})}{f(a_{N+1})} = \frac{1}{e}$이고, $f(a_{N+2}) = \frac{1}{e} f(a_{N+1}) = \frac{1}{e}$이다.

$f(a_{N+2}) = \frac{1}{e} f(a_{N+1}) = \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2.7} \approx .370\ (> 0.1)$

$f(a_{N+3}) = \frac{1}{e} f(a_{N+2}) = \frac{1}{e}\frac{1}{e} f(a_{N+1}) = \frac{1}{e^2} \approx \frac{1}{2.7^2} \approx 0.137\ (> 0.1)$

$f(a_{N+4}) = \frac{1}{e^3} \approx \frac{1}{2.7^3} = 0.051\ (< 0.1)$

n이 증가할수록 $f(a_n)$은 점점 작아지므로 $f(a_n) < 0.1$인 자연수 n의 최소값은 $N+4$이다.

[예시답안]

(문제 2-1) 배점 10점

(정답) $S_1 = \frac{e^{cN}}{2c}$

(풀이)

제시문으로부터

$f(x) = e^{cx}$이므로 $f'(x) = ce^{cx}$

$\mathrm{A}_n(a_n, 0)$에서 접선의 방정식은 $y = f'(a_n)(x - a_n) + f(a_n)$

이 함수의 x절편은 $0 = f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) + f(a_n)$로 부터 $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$

따라서 $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = N - \frac{e^{cN}}{ce^{cN}} = N - \frac{1}{c}$

삼각형$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2$의 밑변의 길이는 $|a_2 - a_1| = \left| N - \frac{1}{c} - N \right| = \frac{1}{c}$이고,

높이는 $f(a_1) = f(N) = e^{cN}$이므로

$A_1B_1A_2$의 넓이(S_1)는 $\frac{1}{2}\frac{1}{c}e^{cN} = \frac{e^{cN}}{2c}$

(문제 2-2) 배점 10점

(정답) $S_n = \frac{e^{cN-(n-1)}}{2c}$

(풀이)

$a_2 = N - \frac{1}{c}$

$f(a_2) = f(N - \frac{1}{c}) = e^{c\left(N - \frac{1}{c}\right)}$,

$a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = \left(N - \frac{1}{c}\right) - \frac{e^{c\left(N-\frac{1}{c}\right)}}{ce^{c\left(N-\frac{1}{c}\right)}} = N - \frac{1}{c} - \frac{1}{c} = N - \frac{2}{c}$

$f(a_3) = f(N - \frac{2}{c}) = e^{c\left(N - \frac{2}{c}\right)}$, $a_4 = a_3 - \frac{f(a_3)}{f'(a_3)} = \left(N - \frac{2}{c}\right) - \frac{e^{c\left(N-\frac{2}{c}\right)}}{ce^{c\left(N-\frac{2}{c}\right)}} = N - \frac{2}{c} - \frac{1}{c} = N - \frac{3}{c}$

$f(a_4) = f(N - \frac{3}{c}) = e^{c\left(N - \frac{3}{c}\right)}$

$\vdots$

$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = \left(N - \frac{n-1}{c}\right) - \frac{e^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}}{ce^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}} = N - \frac{n-1}{c} - \frac{1}{c} = N - \frac{n}{c}$

$a_{n+1} = \left(N - \frac{n}{c}\right)$, $a_n = \left(N - \frac{n-1}{c}\right)$

삼각형 밑변의 길이는 $|a_{n+1} - a_n| = \left|\left(N - \frac{n}{c}\right) - \left(N - \frac{n-1}{c}\right)\right| = \frac{1}{c}$

높이는 $f(a_n) = e^{c\left(N - \frac{n-1}{c}\right)}$

삼각형의 넓이는 $S_n = \frac{1}{2}|(a_{n+1} - a_n)|f(a_n) = \frac{1}{2}\frac{1}{c}e^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)} = \frac{e^{cN-n+1}}{2c}$

(문제 2-3) 배점 5점

(정답) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{e^{cN+1}}{2c(e-1)}$

(풀이)

넓이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{cN-n+1}}{2c} = \frac{e^{cN+1}}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$는 첫 번째 항이 e^{-1}이고, 공비가 e^{-1}인 등비수열의 합이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{e^{cN+1}}{2c}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e^{cN+1}}{2c}\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{e^{cN+1}}{2c(e-1)}$

등비수열의 합을 이용해 면적의 합을 구하면

(문제 2-4) 배점 20점

(정답) $N+4$

(풀이)

$f(a_n)=e^{c\left(N-\frac{n-1}{c}\right)}$에서 $c=1$이면,

$f(a_n)=e^{(N-n+1)}$이고,

$f(a_{n+1})=e^{(N-(n+1)+1)}=e^{(N-n)}$이다.

이때 $n=N+1$이면

$f(a_{N+1})=e^{(N-(N+1)+1)}=e^0=1$이다.

$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}=\frac{e^{(N-n)}}{e^{(N-n+1)}}=\frac{1}{e}$이므로 $f(a_{n+1})=\frac{1}{e}f(a_n)$

따라서 $\frac{f(a_{N+2})}{f(a_{N+1})}=\frac{1}{e}$이고, $f(a_{N+2})=\frac{1}{e}f(a_{N+1})=\frac{1}{e}$이다.

$f(a_{N+2})=\frac{1}{e}f(a_{N+1})=\frac{1}{e}\approx\frac{1}{2.7}\approx .370\,(>0.1)$

$f(a_{N+3})=\frac{1}{e}f(a_{N+2})=\frac{1}{e}\frac{1}{e}f(a_{N+1})=\frac{1}{e^2}\approx\frac{1}{2.7^2}\approx 0.137\,(>0.1)$

$f(a_{N+4})=\frac{1}{e^3}\approx\frac{1}{2.7^3}=0.051\,(<0.1)$

n이 증가할수록 $f(a_n)$은 점점 작아지므로 $f(a_n)<0.1$인 자연수 n의 최소값은 $N+4$이다.

【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (25점)

(가) 삼차방정식 $x^3-12x^2+45x-k=0$의 세 근을 a, b, c라고 하자. (단, k는 실수이다.)

(문제 3-1) 제시문 (가)의 세 근 a, b, c를 모두 실수가 되게 하는 k값의 범위를 구하시오. (10점)

(문제 3-2) 제시문 (가)의 세 근 a, b, c가 모두 양의 정수일 때, k값을 모두 구하시오. (5점)

(문제 3-3) 삼각형 ABC의 세 각 $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$의 크기는 각각 A, B, C로 나타낸다. (문제 3-2)에서 구한 a, b, c가 각 $\angle\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{B}$, $\angle\mathrm{C}$의 대변의 길이인 경우 이 삼각형 ABC에 대해서, $ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B$를 구하시오. (10점)

[출제의도]

방정식과 부등식 그리고 간단한 삼차방정식의 형태를 이해하고, 극댓값과 극솟값을 이용해 함수의 개형을 활용할 수 있는지를 평가하고, 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고 응용할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 3-1)

$x^3-12x^2+45x-k=0$ 방정식의 실수해 3개가 존재하기 위해서는 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x-k$의 극댓값이 0보다 크거나 같고, 극솟값이 0보다 작거나 같아야 한다.

극댓값 극솟값을 구하기 위해서 $f(x)$를 미분하면,

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$이므로 $x=3, x=5$ 에서 극값을 갖는다.

다시 한 번 미분하면

$f''(x)=6x-24$이고, $x=3$이면, $6\times3-24=-6<0$이므로 극댓값, $x=5$이면, $6\times5-24=6>0$이므로 극솟값을 갖는다.

따라서,

$f(3)=27-108+135-k=54-k\ge 0$,

$f(5)=125-300+225-k=50-k\le 0$이고,

$50\le k\le 54$이므로, $\alpha=50$, $\beta=54$이다.

(문제 3-2)

$x^3-12x^2+45x-k=0$과

a, b, c 근으로 갖는 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)$=0을 전개한

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$ 를 비교하면

$a+b+c=12$ (1), $ab+bc+ca=45$(2), $abc=k$(3) 이다.

a, b, c가 모두 정수이면, $k=abc$도 정수이므로 **(문제 3-1)** 범위에서 가능한 k는 50, 51, 52, 53, 54이다.

이중 $a+b+c=12$이고, $ab+bc+ca=45$인 양의 정수 (a,b,c)는 (3,3,6)과 (2,5,5)만 가능하다.

(2,5,5)인 경우 $k=2\times5\times5=50$이고,

(3,3,6)인 경우 $k=3\times3\times6=54$이다.

(문제 3-3)

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 합보다 작아야 한다. $2+5>5$, $3+3=6$이므로 **(문제 3-2)**에서 구한 a, b, c중 삼각형을 이루는 조합은 (2,5,5)이다.

삼각형ABC에서의 코사인 법칙을 적용하면

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = \frac{2^2+5^2+5^2}{2} = 27$$

[예시답안]

(문제 3-1) 배점 10점

(정답) $\alpha = 50$, $\beta = 54$

(풀이)

$x^3 - 12x^2 + 45x - k = 0$ 방정식의 실수해 3개가 존재하기 위해서는 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - k$의 극댓값이 0보다 크거나 같고, 극솟값이 0보다 작거나 같아야 한다.

극댓값 극솟값을 구하기 위해서 $f(x)$를 미분하면,

$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x-3)(x-5)$이므로 $x=3, x=5$ 에서 극값을 갖는다.

다시 한 번 미분하면

$f''(x) = 6x - 24$이고, $x = 3$이면, $6 \times 3 - 24 = -6 < 0$이므로 극댓값, $x = 5$이면, $6 \times 5 - 24 = 6 > 0$이므로 극솟값을 갖는다.

따라서,

$f(3) = 27 - 108 + 135 - k = 54 - k \geq 0$,

$f(5) = 125 - 300 + 225 - k = 50 - k \leq 0$이고,

$50 \leq k \leq 54$이므로, $\alpha = 50$, $\beta = 54$이다.

(문제 3-2) 배점 5점

(정답) $k = 50, 54$

(풀이)

$x^3 - 12x^2 + 45x - k = 0$과

a, b, c 근으로 갖는 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)$=0을 전개한

$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$ 를 비교하면

$a+b+c = 12$ (1), $ab+bc+ca = 45$(2), $abc = k$(3) 이므로

a, b, c가 모두 정수이면, $k = abc$도 정수이므로 **(문제 3-1)** 범위에서 가능한 k는 50, 51, 52, 53, 54이다.

이중 $a+b+c = 12$이고, $ab+bc+ca = 45$인 양의 정수 (a,b,c)는 (3,3,6)과 (2,5,5)만 가능하다.

(2,5,5)인 경우 $k = 2 \times 5 \times 5 = 50$이고,

(3,3,6)인 경우 $k = 3 \times 3 \times 6 = 54$이다.

(문제 3-3) 배점 10점

(정답) 27

(풀이)

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 합보다 작아야 한다. $2+5>5$, $3+3=6$이므로 **(문제 3-2)**에서 구한 a, b, c중 삼각형을 이루는 조합은 (2,5,5)이다.

삼각형ABC에서의 코사인 법칙을 적용하면

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{2^2+5^2+5^2}{2}=27$$