2026학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제
[창의인재/의예과 수학]

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 두 팀이 여러 번 시합을 해서 n번 먼저 이기는 팀이 최종 승리하는 경기 방식을 n선승제라고 한다. 최종 승리하는 팀이 정해지기까지 최대 $(2n-1)$번의 시합을 하기 때문에 $(2n-1)$전 n선승제 경기라고도 한다. 단판승부의 방식은 $n=1$에 해당하는 경우이다.

(나) 승리한 시합 수에서 패배한 시합 수를 뺀 값을 마진(margin)이라고 한다. 가령 3승 1패의 상황은 마진이 2이다.

(다) 매 시합에서 무승부는 없고 모든 시합의 결과는 서로 독립임을 가정한다.

(라) 별도의 언급이 없으면 매 시합에서 두 팀의 승률은 같다.

(마) 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$, $P(0 \le Z \le 1.14) = 0.3729$, $P(0 \le Z \le 1.15) = 0.3749$, $P(0 \le Z \le 1.16) = 0.3770$

이다. 그리고, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$, $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = 0.45$ 값을 사용한다.

[문제 1-1] 7전 4선승제 경기에서 최종 승리 팀을 정할 때까지 치르는 시합 수의 평균(기댓값)을 구하시오. (5점)

[문제 1-2] 7전 4선승제 경기에서 최종 승리 확률이 80% 이상이 되는 마진을 모두 구하시오. (10점)

[문제 1-3] 7전 4선승제 경기를 100번 반복할 때 3승 2패 상황의 팀이 80번 이상 최종 승리할 확률을 구하시오. (10점)

[문제 1-4] 승률이 $\dfrac{3}{5}$인 팀의 경우, 단판승부와 5전 3선승제 경기 중에서 어떤 방식이 더 유리한가를 근거와 함께 설명하시오. (5점)

[출제의도]

확률현상을 표현하는 확률분포를 구하고 필요한 평균 또는 확률을 구할 수 있다. 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 확률의 근삿값을 제시할 수 있다. 확률값을 이용하여 주장의 근거를 제시할 수 있다.

[문항해설]

[문제 1-1] 확률분포를 구하고 평균을 계산
- 최종 승리하는 팀을 정할 때까지 치르는 시합 수를 확률변수로 정의
- 확률변수의 가능한 값을 구하고 각각의 확률을 계산
- (확률분포표를 작성)
- 확률변수의 평균의 정의에 따라 평균을 계산

[문제 1-2] 상황별로 확률을 계산하고 해석하는 능력
- 문제에서 요구하는 마진을 구하기 위하여 마진별로 최종 승리 확률을 계산하는 문제
- 마진별로 가능한 승패 상황을 정리
- 승패 상황별로 최종 승리할 확률을 계산
- 80% 조건에 맞는 마진을 모두 구함

[문제 1-3] 상황에 따른 확률모형(분포)를 수립하고 정규분포와의 관계를 이용하여 확률의 근삿값을 제시
- 상황(조건)에 맞는 최종 승리 확률을 결정 (문제 1-2 참고 가능)
- 반복 횟수에 맞는 이항분포를 결정
- 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하여 근사하는 정규분포를 결정
- 정규분포를 이용한 확률 계산

[문제 1-4] 조건에 따른 확률을 계산하고 판단의 근거를 제시
- 비교하는 경기 방식별로 최종 승리 확률을 계산
- 승리 확률을 비교하여 유리한 경기 방식을 결정
- 유리한 경기 방식을 결정하기 위하여 확률에 기초한 근거 제시

[예시답안]

(문제 1-1)

두 팀이 7전 4선승제 경기에서 치르게 되는 시합 수를 확률변수 N으로 정의

N이 가능한 값은 4, 5, 6, 7

$P(N=4)=P($4승으로 경기 마침$)=(1/2)^4\times 2=(1/2)^3$

$P(N=5)=P($4승 1패로 경기 마침$)={}_4C_3\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)\times(1/2)\times 2=4\cdot(1/2)^5\times 2=(1/2)^2$

$P(N=6)=P($4승 2패로 경기 마침$)={}_5C_3\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)^2\times(1/2)\times 2=10\cdot(1/2)^6\times 2=5\times(1/2)^4$

$P(N=7)=P($4승 3패로 경기 마침$)={}_6C_3\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)^3\times(1/2)\times 2=20\cdot(1/2)^7\times 2=5\times(1/2)^4$

N의 확률분포표는 다음과 같다.

n	4	5	6	7	합계
P(N=n)	2/16	4/16	5/16	5/16	1

시합 수의 평균=E(N)=4×2/16 + 5×4/16 + 6×5/16 + 7×5/16 = 93/16 = 5.8125

(문제 1-2)

(i) 마진이 1인 승패 상황의 최종 승리 확률

1승 :

$(1/2)^3+{}_3C_2\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)\cdot(1/2)+{}_4C_2\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)+{}_5C_2\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)=21/32=0.65625$

2승 1패 : $(1/2)^2+{}_2C_1\cdot(1/2)\cdot(1/2)\cdot(1/2)+{}_3C_1\cdot(1/2)\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)=11/16=0.6875$

3승 2패 : $(1/2)+(1/2)\cdot(1/2)=3/4=0.75$

(ii) 마진이 2인 상황의 승리 확률

2승 : $(1/2)^2+{}_2C_1\cdot(1/2)\cdot(1/2)\cdot(1/2)+{}_3C_1\cdot(1/2)\cdot(1/2)_2\cdot(1/2)+{}_4C_1\cdot(1/2)\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)=13/16=0.8125$

3승 1패 : $(1/2)+(1/2)\cdot(1/2)+(1/2)^2\cdot(1/2)=7/8=0.875$

(iii) 마진이 3인 경우의 승리 확률

3승 : $(1/2)+(1/2)\cdot(1/2)+(1/2)^2\cdot(1/2)+(1/2)^3\cdot(1/2)=15/16=0.9375$

마진이 2 또는 3이면(또는 2 이상) 최종 승리 확률이 80% 이상

(문제 1-3)

100번의 7전 4선승제 경기에서 3승 2패의 팀이 최종 승리하는 횟수를 확률변수 X로 정의

X는 횟수 100, 확률 0.75의 이항분포 B(100, 0.75)를 따른다.

횟수가 충분히 크므로 X는 근사적으로 평균 100×0.75=75, 분산 100×0.75×0.25=18.75의 정규분포 N(75, 18.75)를 따른다.

$P(X\geq80)=P((X-75)/\sqrt{18.75}\geq(80-75)/\sqrt{18.75})\fallingdotseq P(Z\geq2/\sqrt{3})=P(Z\geq1.16)=0.5-0.3770=0.123$

따라서 3승 2패의 팀이 80번 이상 최종 승리할 확률은 0.123

적절한 근거를 바탕으로 제시한 결과는 적절하게 평가

(문제 1-4)

(i) 승률 0.6의 팀이 단판승부에서 승리할 확률은 0.6

(ii) 승률 0.6의 팀이 5전 3선승제에서 승리할 확률

$(3/5)^3+{}_3C_2\cdot(3/5)^2\cdot(2/5)\cdot(3/5)+{}_4C_2\cdot(3/5)^2\cdot(2/5)^2\cdot(3/5)=2133/3125=0.68256$

최종 승리 확률이 더 큰 5전 3선승제 방식이 유리

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 수열 $\{S_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}$$

(나) $0 < x < \pi$일 때, 함수 $P(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$P(x) = \cos(2^0 x) \times \cos(2^1 x) \times \cos(2^2 x) \times \cos(2^3 x) \times \cos(2^4 x) \times \cos(2^5 x) \times \cos(2^6 x) \times \cos(2^7 x) \times \cos(2^8 x) \times \cos(2^9 x) \times \cos(2^{10} x)$$

(다) 수열 $\{C_n\}$과 $\{\theta_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\left(\cos(k\theta_n) - \cos((k+1)\theta_n)\right), \qquad \theta_n = \frac{\pi}{2n+1}$$

(라) 다음의 코사인함수의 덧셈정리 식 (1)과 (2)를 이용하여 식 (3)을 얻을 수 있다.

(1) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

(2) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

(3) $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$

(문제 2-1) 제시문 (가)에 주어진 수열 $\{S_n\}$에 대하여 $\alpha = \lim_{n\to\infty} S_n$이라 하자. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n} S_n\right)$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오. (5점)

(문제 2-2) 제시문 (나)에 주어진 함수 $P(x)$에 대하여 방정식 $|P(x)| = \frac{1}{2^{11}}$의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오. (15점)

(문제 2-3) 제시문 (다)와 (라)를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{C_n}{n^2 \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}\right)$의 값을 구하시오. (15점)

[출제의도]

(2-1) 복잡한 식을 단순화할 수 있는 대수적 계산 능력, 수열의 극한, 급수의 수렴, 발산을 조사할 수 있는 능력을 측정하고자 하였다. (2-2) 삼각함수에 대한 지식과 그 응용력을 측정하고자 하였으며, 여러 가지의 조건이 주어졌을 때, 꼼꼼하게 조건을 살피고 빠짐없이 방정식의 실근의 개수를 찾는 능력을 측정하고자 하였다. (2-3) 논리적인 일관성을 가지고 여러 가지의 식들을, 수열의 극한을 계산할 수 있는 형태로 통합할 수 있는 복합적 계산 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 2-1) 수열의 합을 단순화하여 대부분의 항들을 제거한 후, 남는 항을 이용해 일반항을 얻는다. 그 수열의 극한값을 이용해 급수의 수렴, 발산을 조사한다.

(문제 2-2) 삼각함수의 덧셈정리를 이용해 복잡한 식을 단순화한다. 삼각함수의 정의역의 범위에 따른 부호를 이용해 실수 없이 방정식을 풀어 실근의 개수를 찾는다.

(문제 2-3) 삼각함수 덧셈정리를 응용해 복잡한 식을 단순화한다. 이때 새롭게 얻어진 단순화된 식은 최종목표인 함수의 극한을 구할 수 있는 형태로 바꾼다. 원하는 목표를 위해 식을 변형할 수 있어야 하고 꼼꼼하게 식을 전개하여 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{C_n}{n^2\sin\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)}\right)$을 구한다. 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하고, 부분적분법을 이용한다.

[예시답안]

(문제 2-1)

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{k(k+1)(k+2)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{k(k+1)(k+2)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(k+1)(k+2)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\
&=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\
&=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\\
&=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)
\end{aligned}$$

따라서 $\alpha=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]=\frac{3}{4}$ [3점]

이제 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n=\infty$ 이고 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{1}{n}}{4+\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}}=\frac{3}{4}>0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\alpha^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n\frac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}\neq 0$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{\alpha^n}$ 은 발산한다. [2점]

(문제 2-2)

$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$이므로,

$\sin(2^2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 2^2\sin x\cos x\cos(2x)$을 얻을 수 있고,

이를 반복하여

$\sin(2^3x) = 2\sin(2^2x)\cos(2^2x) = 2^3\sin x\cos x\cos(2x)\cos(2^2x)$을 얻을 수 있다.

이를 계속 반복하면

$\sin(2^{11}x) = 2^{11}\sin x\cos x\cos(2x)\cos(2^2x)\cdots cos(2^{10}x)$가 된다.

이를 정리하면

$P(x) = \dfrac{\sin(2^{11}x)}{2^{11}\sin x}$ [4점]

$0 < x < \pi$에서 $\sin x > 0$이므로 문제 (2-2)의 조건에 의해

$|P(x)| = \dfrac{|\sin(2^{11}x)|}{2^{11}\sin x} = \dfrac{1}{2^{11}} \Leftrightarrow |\sin(2^{11}x)| = \sin x$

즉, $\sin(2^{11}x)$와 $\sin x$가 크기가 같고 부호만 같거나 반대이다. 따라서 두 가지 경우로 나눌 수 있다:

① $\sin(2^{11}x) = \sin x$

② $\sin(2^{11}x) = -\sin x$ [2점]

①의 경우, $\sin(2^{11}x) = \sin x$이면, 다음 두 가지 경우가 생긴다.

㉠ $2^{11}x = x + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{2^{11}-1}$, $k = 1, 2, 3, \cdots, 2^{11-1}-1$

㉡ $2^{11}x = \pi - x + 2m\pi \Rightarrow x = \dfrac{(2m+1)\pi}{2^{11}+1}$, $m = 0, 1, 2, \cdots, 2^{11-1}-1$

㉠과 ㉡을 동시에 만족하는 x가 존재하는지 알아보기 위해

$\dfrac{2k\pi}{2^{11}-1} = \dfrac{(2m+1)\pi}{2^{11}+1}$, $k = 1, 2, 3, ..., 2^{11-1}-1$, $m = 0, 1, 2, \cdots, 2^{11-1}-1$을 살펴보면,

$2k(2^{11}+1) = (2m+1)(2^{11}-1)$을 만족해야 한다. 하지만 여기에서 좌변은 짝수이고 우변은 홀수이므로 ㉠과 ㉡을 동시에 만족하는 x는 존재하지 않는다.

따라서 ①의 경우 실근의 개수는 $2^{11}-1$개이다. [4점]

②의 경우, $\sin(2^{11}x) = -\sin x$이면, 마찬가지로 다음 두 가지 경우가 생긴다.

㉢ $2^{11}x = -x + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{2^{11}+1}$, $k = 1, 2, 3, \cdots, 2^{11-1}$

㉣ $2^{11}x = \pi + x + 2m\pi \Rightarrow x = \dfrac{(2m+1)\pi}{2^{11}-1}$, $m = 0, 1, 2, \cdots, 2^{11-1}-2$

이제 ㉢과 ㉣을 동시에 만족하는 x가 존재하는지 알아보기 위해

$\dfrac{2k\pi}{2^{11}+1} = \dfrac{(2m+1)\pi}{2^{11}-1}$, $k = 1, 2, 3, \cdots, 2^{11-1}-1$, $m = 0, 1, 2, \cdots, 2^{11-1}-2$을 살펴보면,

$2k(2^{11}-1) = (2m+1)(2^{11}+1)$을 만족해야 한다. 하지만 여기에서 좌변은 짝수이고 우변은 홀수이므로 ㉢과 ㉣을 동시에 만족하는 x는 존재하지 않는다.

따라서 ②의 경우 실근의 개수는 $2^{11}-1$개다. [4점]

①과 ②를 동시에 만족하기 위해서는 $\sin x = 0$이어야 하지만 $0 < x < \pi$이므로 그런 x는 존재하지 않는다. 따라서 서로 다른 실근의 개수는 ①의 $2^{11}-1$개와 ②의 $2^{11}-1$개를 합친 개수인 $2^{12}-2 = 4094$개다. [1점]

(문제 2-3)

$$C_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)(\cos(k\theta_n) - \cos((k+1)\theta_n))$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left[\cos\left(k\theta_n + \frac{\theta_n}{2} - \frac{\theta_n}{2}\right) - \cos\left(k\theta_n + \frac{\theta_n}{2} + \frac{\theta_n}{2}\right)\right]$$

이므로 $A = k\theta_n + \dfrac{\theta_n}{2}$, $B = \dfrac{\theta_n}{2}$이라 하면, 제시문 (라)에 의해

$$C_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)2\left[\sin\left(k\theta_n + \frac{\theta_n}{2}\right)\sin\frac{\theta_n}{2}\right]$$ [3점]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{n^2\sin\frac{\theta_n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2(2k-1)\left[\sin\left(k\theta_n + \frac{\theta_n}{2}\right)\sin\frac{\theta_n}{2}\right]}{n^2\sin\frac{\theta_n}{2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2(2k-1)\sin\left(k\theta_n + \frac{\theta_n}{2}\right)}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2(2k-1)}{n^2}\sin\left(k\theta_n + \frac{\theta_n}{2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2(2k-1)}{n^2}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{n^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{2k-1}{2n+1}\cdot\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{n^2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\left[\frac{(2k+1)-2}{2n+1}\cdot\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2(2n+1)^2}{n^2}\right]\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right) - \frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(2n+1)^2}{n^2}\right]\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right) - \frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$

이 된다. [3점]

이제 $x_k = \dfrac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}$, $\Delta x = \dfrac{1}{2n+1}$이라 하자. 적분구간 $[a, b] = [0, 1/2]$이 된다.

일단 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+8n+1}{n^2} = 8$이므로,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right) - \frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$의 극한값이 존재하는지 살펴보자.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right) - \frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left(2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$

한편,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right] = \int_0^{1/2}2x\sin(\pi x)\,dx$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)$$
이제

$-n \le \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\le n$이므로, $\frac{-n}{(2n+1)^2}\le \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\le \frac{n}{(2n+1)^2}$

조임정리를 이용해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)=0$임을 알 수 있다. [3점]

따라서, 각각의 극한값이 존재하므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)-\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left(2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
이 된다. [3점]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{n^2\sin\frac{\theta_n}{2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(2n+1)^2}{n^2}\right]\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+1}\left[2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)-\frac{2}{2n+1}\sin\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n+1}\right)\right]$$
$$=8\int_0^{1/2}2x\sin(\pi x)\,dx$$
이제 부분적분을 이용하면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{n^2\sin\frac{\theta_n}{2}}=8\int_0^{1/2}2x\sin(\pi x)\,dx=\frac{16}{\pi^2}$$ [3점]

【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 좌표평면 위의 두 점 $A(-1,0)$, $B(1,0)$에 대하여 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 $x^2+y^2=1$ $(y \geq 0)$가 있다.

(나) 점 $D(0,1)$에 대하여 호 BD 위를 움직이는 점 C가 있다.

(다) 원점 O에 대하여 $\angle BOC=\theta$의 시각 t에 대한 변화율은 $\dfrac{d\theta}{dt}=\sqrt{2}$ 이다.

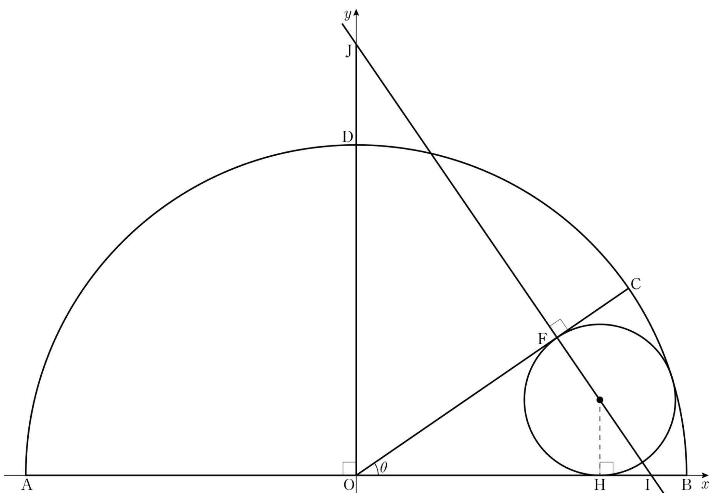
(라) 선분 OC, 선분 OB, 호 BC에 동시에 접하는 원이 있다. 이 원을 O_1이라 하자.

(마) 원 O_1과 선분 OC의 접점을 F라 하고, 원 O_1과 선분 OB의 접점을 H라 하자.

(바) 점 F를 지나고 선분 OC에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 I, y축과 만나는 점을 J라 하자.

(사) 선분 AB를 장축, 점 H를 한 초점으로 하는 타원을 T라 하자.

(아) 삼각함수의 덧셈정리에 의해서 $\cos(2\gamma)=1-2\sin^2\gamma$이다. 이로부터 $\sin^2\gamma=\dfrac{1-\cos(2\gamma)}{2}$ 임을 알 수 있다.



(문제 3-1) 타원 T의 단축의 길이가 $2\overline{OF}$일 때, 시각 t에 대한 원 O_1의 넓이의 변화율을 구하시오. (10점)

(문제 3-2) $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JO} \geq \overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IF}$일 때, $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{CQ}$를 만족하는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OQ}|^2$의 최댓값을 구하시오. (단, 기호 $\cdot$ 은 내적을 나타낸다.) (10점)

(문제 3-3) 선분 AC, 선분 AB, 호 BC에 동시에 접하는 원을 O_2라 하자. 원 O_2가 선분 OD에 접할 때, $\overline{OI}=\dfrac{u+v\sqrt{2}}{w}$ 이다. 이 때, $u+v+w$의 값을 구하시오. (단, u, v, w는 자연수이며, 세 수의 최대공약수는 1이다.) (15점)

[출제의도]

이차곡선과 평면벡터에 대한 이해도 및 삼각함수에 대한 지식과 그 응용력을 측정하고자 하였으며 계산 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 3-1) 선분 OE와 삼각형 HOG으로부터 원 O_1의 반지름과 선분 OH의 길이를 구한다. 타원의 방정식으로부터 단축의 길이와 $\overline{\mathrm{OH}}$에 대한 정보를 바탕으로 $\sin(\theta/2)$의 값을 구하고 삼각함수의 성질과 θ의 조건으로부터 $\cos(\theta/2)$의 값을 구한다. 원 O_1의 넓이를 미분하여 위의 계산에서 얻은 값을 대입하여 답을 얻는다.

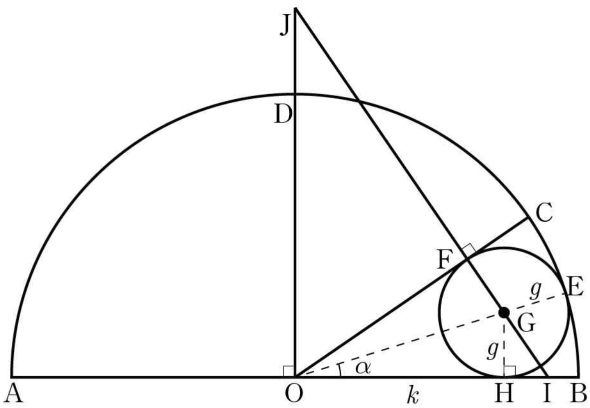
(문제 3-2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$이므로 점 Q는 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 내려 $\overline{\mathrm{OQ}} = \sin\alpha$을 얻는다. $\overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JO}} \geq \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}}$로부터 $\overline{\mathrm{JF}} \geq \overline{\mathrm{IF}}$을 얻고, 두 삼각형 IOF과 OJF으로부터 $\theta \leq \pi/4$을 얻는다. 그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = \sin^2\alpha$의 최댓값은 $\alpha = \theta/2 = \pi/8$일 때 발생한다. 제시문으로부터 $\sin^2(\pi/8) = (2-\sqrt{2})/4$를 얻는다.

(문제 3-3) 직각삼각형 KOL과 삼각형 KAL에서 원 O_2의 반지름 $\overline{\mathrm{KL}}$과 $\overline{\mathrm{OK}}$를 얻는다. 원 O_2가 선분 OD에 접하므로 $\tan(\alpha/2) = (2\pm\sqrt{2})/2$를 얻는다. $\theta = 2\alpha > \pi$이므로 $\tan(\alpha/2) = (2-\sqrt{2})/2$이다. 삼각함수의 정의와 삼각함수의 덧셈정리로부터 $\sin\alpha$와 $\cos\alpha$를 얻는다. 위의 계산에서 얻은 값을 아래 식에 대입하여 계산한다.

$$\overline{\mathrm{OI}} = \frac{\cos\alpha}{(2\cos^2\alpha - 1)(1+\sin\alpha)} = \frac{19+6\sqrt{2}}{21}$$

[예시답안]

(문제 3-1)



해설의 편의를 위해 $\alpha = \theta/2$, 원 O_1의 반지름을 g, 원 O_1의 중심을 G, $\overline{\mathrm{OH}} = k$라 하자.

선분 OE에서 $\overline{\mathrm{OE}} - \overline{\mathrm{GE}} = 1 - g$이고 삼각형 HOG에서 $\sin\alpha = \dfrac{g}{1-g}$이다.

그러므로 $g(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$이고 삼각형 HOG에서 $k(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$이다.

타원 T의 단축의 길이를 $2b$라 할 때, $b^2 = 1^2 - k^2 = 1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}$이다.

$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OF}} = k(\alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ 이므로

$$1 - \frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} = \frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2} \ \Rightarrow\ \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

원 O_1의 넓이를 S라 하면, $S(\alpha) = \pi g^2 = \dfrac{\pi\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}$ 이므로,

$$\frac{d}{dt}S(\alpha) = \frac{d}{dt}\frac{\pi\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}$$

$$= \pi\left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\,\alpha' \cdot (1+\sin\alpha)^2 - \sin^2\alpha \cdot 2(1+\sin\alpha)\cos\alpha\,\alpha'}{(1+\sin\alpha)^4}\right)$$

$\left(\alpha' = \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{d(\theta/2)}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{ 이므로}\right)$

$$= \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha \cdot (1+\sin\alpha) - \sin^2\alpha \cdot 2\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)^3}\right)$$

$$= \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)^3}$$

$$= \pi\sqrt{2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)^3}$$

점 C는 호 BD 위의 점이므로 $\alpha = \theta/2$는 예각이고 $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ 이므로 $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다. 그러므로

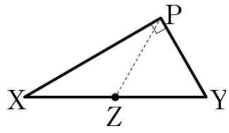
$$\frac{d}{dt}S(\alpha) = \pi\sqrt{2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin\alpha)^3}$$

$$= \pi\sqrt{2}\frac{(1/3)(2\sqrt{2}/3)}{(1+(1/3))^3}$$

$$= \pi\sqrt{2}\frac{3\sqrt{2}}{32}$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$

(문제 3-2)



문제의 조건 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{CQ}$을 이해하기 위해, 위의 그림에 주어진 $\overrightarrow{YP} \perp \overrightarrow{XP}$를 고려하자.

$$\overrightarrow{YP} \perp \overrightarrow{XP} \iff \overrightarrow{YP} \cdot \overrightarrow{XP} = 0$$

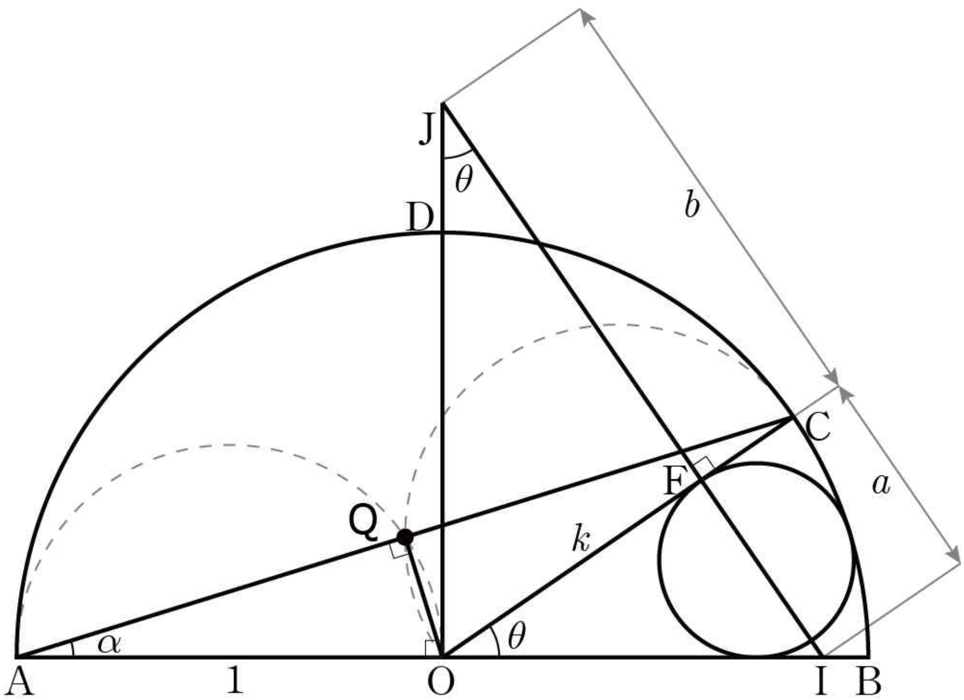
선분 XY의 이등분점 Z에 대해서

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{YP} \cdot \overrightarrow{XP} = (\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZP}) \cdot (\overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZP}) \\ &= \overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{ZP} + \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZP} \end{aligned}$$

점 Z가 선분 XY의 이등분점이므로 $\overrightarrow{YZ} = -\overrightarrow{XZ}$이다. $\vec{r} = \overrightarrow{YZ}$이라 하면,

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{ZP} + \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZP} \\ &= \vec{r} \cdot (-\vec{r}) + \vec{r} \cdot \overrightarrow{ZP} + \overrightarrow{ZP} \cdot (-\vec{r}) + \overrightarrow{ZP} \cdot \overrightarrow{ZP} \end{aligned}$$

그러므로 $|\overrightarrow{ZP}|^2 = |\vec{r}|^2$이다. 즉, 점 P는 선분 XY를 지름으로 하는 원 위에 있다.



점 Q가 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{AQ}$이므로 선분 AO를 지름으로 하는 원 위에 있고, 점 Q가 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{CQ}$이므로 선분 CO를 지름으로 하는 원 위에 있다. 그러므로 점 Q는 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발이다.

점 Q는 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발이므로 $\overline{\mathrm{OQ}} = \sin\alpha$이다.
점 C는 호 BD 위의 점이므로 $\alpha = \theta/2$는 예각이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{OQ}} = \sin\alpha$가 최댓값을 갖기 위해서는 α가 최댓값을 가져야 한다.

주어진 조건: $\overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JO}} \geq \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JO}} \geq -\overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JO}} + \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}} \geq 0$$

($\overrightarrow{\mathrm{JI}} \perp \overrightarrow{\mathrm{FO}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FO}} = 0$)

$$\overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JO}} + \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}} = \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JO}} + \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FO}} + \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IF}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{JO}} + \overrightarrow{\mathrm{FO}} + \overrightarrow{\mathrm{IF}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{JI}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{JO}} + \overrightarrow{\mathrm{IO}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{JO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JI}} \geq \overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}}$$

여기에서 $\overrightarrow{\mathrm{JO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JI}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}}$는 각각 다음과 같다.

$$\overrightarrow{\mathrm{JO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JI}} = \overline{\mathrm{JO}} \times \overline{\mathrm{JI}} \times \cos(\angle \mathrm{OJI}) = \overline{\mathrm{JO}} \times \overline{\mathrm{JI}} \times \frac{\overline{\mathrm{JF}}}{\overline{\mathrm{JO}}} = \overline{\mathrm{JI}} \times \overline{\mathrm{JF}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overline{\mathrm{IO}} \times \overline{\mathrm{IJ}} \times \cos(\angle \mathrm{OIJ}) = \overline{\mathrm{IO}} \times \overline{\mathrm{IJ}} \times \frac{\overline{\mathrm{IF}}}{\overline{\mathrm{IO}}} = \overline{\mathrm{IJ}} \times \overline{\mathrm{IF}}$$

$a = \overline{\mathrm{IF}}$, $b = \overline{\mathrm{JF}}$라고 하면, $b \times \overline{\mathrm{JI}} = \overrightarrow{\mathrm{JO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JI}} \geq \overrightarrow{\mathrm{IO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = a \times \overline{\mathrm{IJ}}$이므로 a와 b 사이에 다음의 부등식이 성립한다.

$$b \geq a$$

직각삼각형 IOF에서 $\tan\theta = a/k$이고, 직각삼각형 OJF에서 $\tan\theta = k/b$이므로

$$b = k/\tan\theta \geq k\tan\theta = a$$

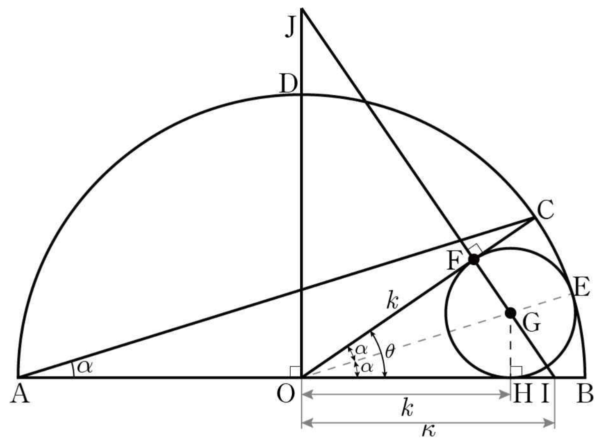
$$\Rightarrow \tan^2\theta \leq 1$$

$$\Rightarrow \theta \leq \pi/4$$

그러므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2 = \sin^2\alpha$의 최댓값은 $\alpha = \theta/2 = \pi/8$일 때 발생한다.

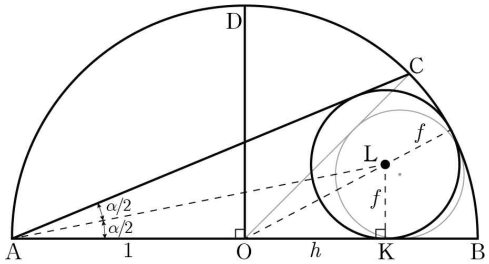
$$\sin^2(\pi/8) = \frac{1-\cos(\pi/4)}{2} = \frac{1-\sqrt{2}/2}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

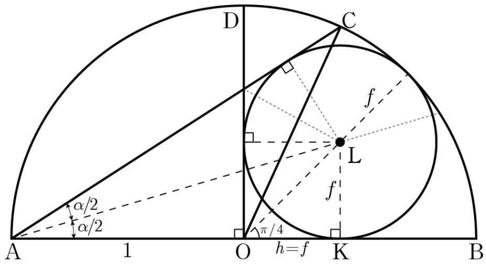
(문제 3-3)



해설의 편의를 위해 $\overline{\mathrm{OH}} = k$, $\overline{\mathrm{OI}} = x$라 하자. 삼각형 IOF에서 $\cos\theta = k/x$이다.

$$\Rightarrow\ x = \frac{k}{\cos\theta} = \frac{k}{\cos(2\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos(2\alpha)(1+\sin\alpha)}$$ 이다.





원 O_2의 반지름을 f, 선분 OK의 길이를 h라 하자. 직각삼각형 KOL에서 $(1-f)^2 = h^2 + f^2$이고 삼각형 KAL에서

$$\tan(\alpha/2) = \frac{f}{1+h}$$

$$\Rightarrow\ h = \frac{f}{\tan(\alpha/2)} - 1$$

그러므로 $(1-f)^2 = \left(\frac{f}{\tan(\alpha/2)} - 1\right)^2 + f^2$

$$\Rightarrow\ 1 - 2f + f^2 = \left(\frac{f}{\tan(\alpha/2)}\right)^2 - \frac{2f}{\tan(\alpha/2)} + 1 + f^2$$

$$\Rightarrow\ -2 = \frac{f}{\tan^2(\alpha/2)} - \frac{2}{\tan(\alpha/2)}$$

$$\Rightarrow\ f = 2\tan(\alpha/2) - 2\tan^2(\alpha/2)$$

$$\Rightarrow\ h(\alpha) = 1 - 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

원 O_2가 선분 OD에 접하므로 $h = f$이다. 즉,

$$2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ 2\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 4\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

여기에서 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} > 1$인 경우,

$\alpha/2 > \pi/4$

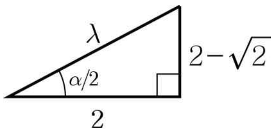
$\Rightarrow\ \alpha > \pi/2$

$\Rightarrow\ \theta = 2\alpha > \pi$가 되어 제시문 (나)에 위배된다.

그러므로

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

한 각이 $\alpha/2$이고 두 변의 길이가 각각 2, $2-\sqrt{2}$인 직각삼각형에서 빗변의 길이를 λ라고 하면, $\lambda^2 = 2^2+(2-\sqrt{2})^2 = 10-4\sqrt{2}$이다.



삼각함수의 덧셈정리에 의해서 다음과 같이 $\sin\alpha$와 $\cos\alpha$를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(2\,\alpha/2) = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)\\ &= 2\,\frac{2-\sqrt{2}}{\lambda}\,\frac{2}{\lambda} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{\lambda^2} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{10-4\sqrt{2}} = \frac{4-2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(2\,\alpha/2) = 2\cos^2(\alpha/2)-1\\ &= 2\,\frac{4}{\lambda^2}-1 = \frac{8-\lambda^2}{\lambda^2} = \frac{8-(10-4\sqrt{2})}{10-4\sqrt{2}} = \frac{-1+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{-1+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9-4\sqrt{2}}{33-20\sqrt{2}}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{OI}} = x = \dfrac{\cos\alpha}{(2\cos^2\alpha-1)(1+\sin\alpha)} = \dfrac{\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}}{\left(2\dfrac{9-4\sqrt{2}}{33-20\sqrt{2}}-1\right)\left(1+\dfrac{4-2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\right)}$

$$\begin{aligned}&= \frac{-1+2\sqrt{2}}{\left(\frac{18-8\sqrt{2}}{33-20\sqrt{2}}-\frac{33-20\sqrt{2}}{33-20\sqrt{2}}\right)((5-2\sqrt{2})+(4-2\sqrt{2}))}\\ &= \frac{(-1+2\sqrt{2})(33-20\sqrt{2})}{(-15+12\sqrt{2})(9-4\sqrt{2})}\\ &= \frac{-113+86\sqrt{2}}{-231+168\sqrt{2}}\\ &= \frac{-113+86\sqrt{2}}{-21(11-8\sqrt{2})}\\ &= \frac{113-86\sqrt{2}}{21(11-8\sqrt{2})}\\ &= \frac{(113-86\sqrt{2})(11+8\sqrt{2})}{21(11-8\sqrt{2})(11+8\sqrt{2})}\\ &= \frac{(113-86\sqrt{2})(11+8\sqrt{2})}{21(121-128)}\end{aligned}$$

$$= \frac{-133-42\sqrt{2}}{21\times(-7)}$$

$$= \frac{19+6\sqrt{2}}{21}$$

그러므로 $\overline{\mathrm{OI}} = \dfrac{u+v\sqrt{2}}{w} = \dfrac{19+6\sqrt{2}}{21}$ 이다. 그러므로 $u+v+w = 19+6+21 = 46$이다.