2025학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제[창의인재]

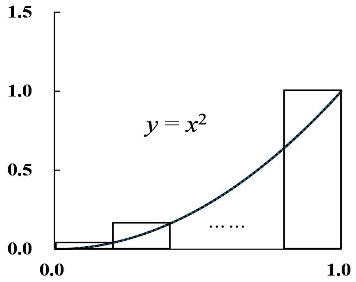
==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

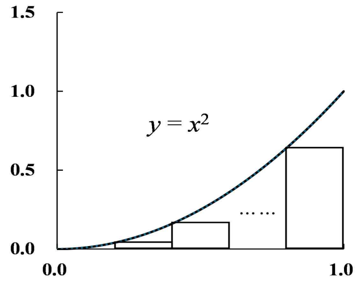
(가) 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 x축 및 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자. <그림 1>은 닫힌구간 $[0,1]$을 n등분한 소구간의 오른쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형을 그린 그림이다. <그림 2>는 닫힌구간 $[0,1]$을 n등분한 소구간의 왼쪽 끝점의 함수값을 높이로 하는 직사각형을 그린 그림이다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 항상 존재함이 알려져 있고, 이 극한값은 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 같다.

$\left(\text{단, } \Delta x=\dfrac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$



<그림 1>



<그림 2>

[문제 1-1] $n=5$일 때 제시문 (가)의 <그림 1>과 같은 방법으로 만든 직사각형들의 넓이의 합과 <그림 2>와 같은 방법으로 만든 직사각형들의 넓이의 합을 각각 구하시오. (10점)

[문제 1-2] $n=100$일 때 제시문 (가)의 <그림 1>과 같은 방법으로 만든 직사각형들의 넓이의 합과 <그림 2>와 같은 방법으로 만든 직사각형들의 넓이의 합을 각각 구하시오. (10점)

[문제 1-3] 닫힌구간 $\left[0, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right]$에서 곡선 $y=x\cos(x^2)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구하시오. (10점)

[출제의도]

정적분과 급수의 합의 관계를 이해하고 치환적분을 이용한 정적분을 사용하여 면적을 구할 수 있는지를 평가하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 1-1) <그림1>에서 닫힌구간 $[0,1]$을 5등분한 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$이고, 이때 y좌표는 $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(\frac{5}{5}\right)^2$이다. <그림2>에서 닫힌구간 $[0,1]$을 5등분한 각 소구간의 왼쪽 끝 점의 x좌표는 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$이고, 이때 y좌표는 $\left(\frac{0}{5}\right)^2$, $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$이다. 따라서, <그림1>에서는 5개의 직사각형의 넓이를, <그림2>에서는 4개의 직사각형의 넓이를 더한다.

(문제 1-2) <그림1>에서 닫힌구간 $[0,1]$을 n등분한 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 $\frac{k}{n}, (k=1,2,\cdots n)$이고, 이때 y좌표는 $\left(\frac{k}{n}\right)^2$이다. 각각의 직사각형의 넓이는 $\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$이므로 이 직사각형들의 넓이의 합은 $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이다. 마찬가지로 <그림2>에서 닫힌구간 $[0,1]$을 n등분한 각 소구간의 왼쪽 끝 점의 x좌표는 $\frac{k}{n}, (k=0,1,\cdots,n-1)$이고, 이때 y좌표는 $\left(\frac{k}{n}\right)^2$이다. 각각의 직사각형의 넓이는 $\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n}$이므로 이 직사각형들의 넓이의 합은 $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$이다.
$n=100$일 때 <그림 1>에서는 100개의 직사각형의 넓이의 합을, <그림 2>에서는 99개의 직사각형의 넓이의 합을 구한다.

(문제 1-3) 함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있다. 치환적분법을 이용하여 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\cos(x^2)dx$의 값을 구할 수 있다.

[예시답안]

(문제 1-1)

<그림 1>에서 $[0,1]$사이를 5등분하면 $\Delta x=\frac{1}{5}$이고, 직사각형의 높이는 각각 $\left(\frac{1}{5}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(\frac{5}{5}\right)^2$이므로 각각의 직사각형의 넓이의 합을 A_1이라 하면

$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{125}$, $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{125}$, $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{125}$, $\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{125}$,

$$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{5}\right)^2=\frac{25}{125}$$ 이고,

$$A_1=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5}{5}\right)^2$$ 이므로

$$A_1=\frac{1+4+9+16+25}{125}=\frac{55}{125}$$ (또는 0.44)

마찬가지로 <그림 2>에서 각각의 직사각형의 넓이의 합을 A_2라 하면

$$\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{125},\ \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{125},\ \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{125},\ \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{125}$$ 이고,

$$A_2=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^2$$ 이므로

$$A_2=\frac{1+4+9+16}{125}=\frac{30}{125}$$ (또는 0.24)

(문제 1-2)

문제 1-1번에 따라 <그림 1>에서는

$$\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n=100$이면 $\frac{1}{100^3}\frac{100\times101\times201}{6}=\frac{338350}{100^3}$ (또는 0.33835)

<그림 2>에서는

$$\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$n=100$이면 $\frac{1}{100^3}\frac{99\times100\times199}{6}=\frac{328350}{100^3}$ (또는 0.32835)

(문제 1-3)

제시문에 주어진 바와 같이 면적은 적분을 구할 수 있으므로

$$\text{면적}=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}x\cos(x^2)dx$$

$x^2=t$로 치환하면, $2xdx=dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\left|\sin(t)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sin(\frac{\pi}{2})-\sin(0)\right)=\frac{1}{2}$$

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 최고차 항의 계수가 1인 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0$의 한 개의 허근이 $1 + i$이다. (단, a, b는 실수)

(나) 최고차 항의 계수가 1인 삼차방정식 $x^3 + cx^2 + 100x + 100 = 0$의 계수 c는 양의 정수이다.

[문제 2-1] 제시문 (가)의 $y = x^3 + ax^2 + bx - 4$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (20점)

[문제 2-2] 제시문 (나)의 $y = x^3 + cx^2 + 100x + 100$이 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때 c의 최솟값을 구하시오. (10점)

[출제의도]

복소수, 이차방정식의 판별식의 활용, 방정식의 개형 및 근의 특성을 이해하고 있는지를 평가하고, 함수의 극댓값, 극솟값의 특성을 이해하는지를 평가하고자 하였다.

[문항해설]

[문제 2-1] 주어진 삼차방정식의 허근의 켤레복소수도 역시 근이 되며 나머지 한 근은 실근이다. 실근을 미지수로 놓고, 3개의 근에 대한 삼차방정식을 전개하여 주어진 삼차방정식과 비교하여, 실근과 b, c를 구한다. 주어진 곡선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용해 구한다.

[문제 2-2] 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위해서는 이차방정식 $f'(x)=0$가 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다. 판별식이 0보다 크도록 하는 실수 c의 최솟값을 구한다.

[예시답안]

(문제 2-1) (20점)

삼차방정식 $x^3+bx^2+cx-4=0$ (식1)의 한 개의 허근이 $1+i$이면 다른 허근은 $1-i$이다.
나머지 실근을 x_1이라고 하면, 삼차방정식은 $(x-(1+i))(x-(1-i))(x-x_1)=0$이다.
이를 정리하면, $x^3-(x_1+2)x^2+(2x_1+2)x-2x_1=0$이므로,

식1과 비교하면, $2x_1=-4$이므로 한 개의 실근은 $x_1=2$이다.
따라서 $b=-(x_1+2)=-(2+2)=-4$, $c=(2x_1+2)=(2\times 2+2)=6$ 이다.

x절편은 $x=2$이고 $0\le x\le 2$에서 $x^3-4x^2+6x-4\le 0$ 이므로
주어진 곡선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \left|x^3-4x^2+6x-4\right|dx=\int_0^2\left(-x^3+4x^2-6x+4\right)dx=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ \frac{8}{3}$

(문제 2-2) (10점)

삼차함수가 극댓값, 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $y'=0$이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다.
$y=x^3+cx^2+100x+100$를 미분하면
$y'=3x^2+2cx+100$
$D=4c^2-4\times 3\times 100>0$
$c^2>300$을 만족하는 양의 정수 c의 최솟값은 18이다.$(\because 17^2=289, 18^2=324)$

【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(40점)

(가) 좌표평면 위를 움직이는 점 P_1의 시각 t에서의 위치 $(x_1(t), y_1(t))$는 다음과 같다. $(t \ge 0)$

$$x_1(t) = \int_0^t \theta \sin\theta \, d\theta, \ y_1(t) = \int_0^t \theta \cos\theta \, d\theta$$

(나) 좌표평면 위를 움직이는 또 다른 점 P_2의 시각 t에서의 위치 $(x_2(t), y_2(t))$는 다음과 같다. $(t \ge 0)$

$$x_2(t) = -t\cos t, \ y_2(t) = t\sin t$$

[문제 3-1] 점 P_1과 원점 $(0,0)$ 사이의 거리를 구하시오. (10점)

[문제 3-2] 점 P_1과 원점 $(0,0)$ 사이의 거리의 순간변화율이 0이 되는 시각 t를 구하시오. (10점)

[문제 3-3] 시각 $t=0$에서 시각 $t=2\pi$까지 점 P_1이 움직인 거리를 구하시오. (10점)

[문제 3-4] 시각 $t=0$에서 시각 $t=2\pi$사이에, 두 점 P_1, P_2 사이의 거리가 최대가 되는 시각과 이 시각에서 두 점 사이의 거리를 각각 구하시오. (10점)

[출제의도]

부분적분법을 이용한 적분 능력을 평가하고, 점과 점 사이의 거리를 정의할 수 있는지를 평가하고자 하였다. 순간변화율의 개념을 이해하는지를 평가하고자 하였다. 매개변수 방정식으로 표현된 곡선의 거리 및 두 점 사이의 거리 이때의 극댓값과 극솟값을 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 3-1) 부분적분을 이용하여 $x_1(t)$, $y_1(t)$를 구하고 이를 이용하여 이동하는 점의 원점과의 거리를 계산한다.

(문제 3-2) 3-1에서 계산된 거리의 순간변화율을 구하기 위해 이를 미분하여 미분한 방정식이 0이 되는 조건을 구한다.

(문제 3-3) 매개변수 방정식으로 표현된 곡선의 거리를 구하기 위해서 3-1의 방정식 $x_1(t)$, $y_1(t)$을 각각 시간에 대해서 미분하여 $\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2}\,dt$를 이용하여 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 이동한 거리를 구한다.

(문제 3-4) $x_1(t)$, $y_1(t)$와 $x_2(t)$, $y_2(t)$ 사이의 거리함수를 구하고, 이를 미분하여 극값이 존재하는 시각을 구한다, 거리함수를 이차 미분해서 이 시각이 극대값임을 확인한다.

[예시답안]

(문제 3-1) (10점)

부분적분법을 이용하여

$$x_1(t)=\int_0^t \theta\sin(\theta)d\theta= \left|\theta\cos(\theta)\right|_0^t-\int_0^t\cos(\theta)d\theta= \left|-\theta\cos(\theta)\right|_0^t+\left|\sin(\theta)\right|_0^t$$

$$\therefore x_1(t)=-t\cos(t)+\sin(t)$$

$$y_1(t)=\int_0^t \theta\cos(\theta)d\theta=\left|\theta\sin(\theta)\right|_0^t-\int_0^t\sin(\theta)d\theta= \left|\theta\sin(\theta)\right|_0^t+\left|\cos(\theta)\right|_0^t$$

$$\therefore y_1(t)=t\sin(t)+\cos(t)-1$$

원점과의 거리는

$$s(t)=\sqrt{((-t\cos(t)+\sin(t))-0)^2+((t\sin(t)+\cos(t)-1)-0)^2}$$

$$=\sqrt{t^2\cos^2(t)-2t\cos(t)\sin(t)+\sin^{2(t)}+t^2\sin^2(t)+2t\sin(t)\cos(t)+\cos^2(t)-2t\sin(t)-2\cos(t)+1}$$

$$=\sqrt{t^2+2-2t\sin(t)-2\cos(t)}$$

(문제 3-2) (10점)

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{t^2+2-2t\sin(t)-2\cos(t)}\right)}{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2t-2\sin(t)-2t\cos(t)+2\sin(t)}{\sqrt{t^2+2+2t\sin(t)+2\cos(t)}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2t-2t\cos(t)}{\sqrt{t^2+2+2t\sin(t)+2\cos(t)}}=0$$

$$t(1-\cos(t))=0$$

$t=0$ 또는 $t=2n\pi$ (단, $n=1,2,\cdots$)

(문제 3-3) (10점)

매개변수 방정식의 곡선의 길이는

$l(t)=\int_0^t\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ 이므로

$$x_1(t)=-t\cos(t)+\sin(t)$$

$$\frac{dx}{dt}=-\cos(t)+t\sin(t)+\cos(t)=t\sin(t)$$

$$y_1(t)=t\sin(t)+\cos(t)-1$$

$$\frac{dy}{dt}=\sin(t)+t\cos(t)-\sin(t)=t\cos(t)$$

$$l(2\pi)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(t\sin(t))^2+(t\cos(t))^2}\,dt=\int_0^{2\pi}t\,dt=\left|\frac{t^2}{2}\right|_0^{2\pi}=2\pi^2$$

(문제 3-4) (10점)

두 점 사이의 거리는 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 이므로

$$\sqrt{(-t\cos(t)+\sin(t)+t\cos(t))^2+(t\sin(t)+\cos(t)-1-t\sin(t))^2}$$

$$=\sqrt{(\sin(t))^2+(\cos(t)-1)^2}$$

$$=\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)-2\cos(t)+1}$$

$$=\sqrt{2-2\cos(t)}$$

$$\frac{d\left(\sqrt{2-2\cos(t)}\right)}{dt}=\frac{2\sin(t)}{2\sqrt{2-2\cos(t)}}=0$$

$\left(\text{또는 }\frac{d\left(\sqrt{2-2\cos(t)}\right)}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{4\sin^2(\frac{t}{2})}\right)}{dt}=\frac{d\left(2\sin\frac{t}{2}\right)}{dt}=\cos\frac{t}{2}=0\right)$ 일 때 극값을 갖는다.

$0<t\le 2\pi$ 에서는 $t=\pi$ 일 때 극값을 갖는다.

최대/최소를 판별하기 위해 이계도함수를 구하면,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{2-2\cos(t)}}\right)=\frac{\cos(t)\sqrt{2-2\cos(t)}-\sin(t)\frac{2\sin(t)}{\sqrt{2-2\cos(t)}}}{2-2\cos(t)}=\frac{2\cos(t)-2\cos^2(t)-2\sin^2(t)}{(2-2\cos(t))\sqrt{2-2\cos(t)}}$$

$\frac{2\cos(\pi)-2}{(2-2\cos(\pi))\sqrt{2-2\cos(\pi)}} = -\frac{1}{2} < 0$ $\left(\text{또는} \frac{d\left(\cos(\frac{t}{2})\right)}{dt} \rightarrow -\sin(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0\right)$이므로 극댓값을 갖는다.

구간 내에서 두 점 사이의 거리가 최대일 때의 시각은 $t=\pi$이고, 이때 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2-2\cos(\pi)} = 2$이다.