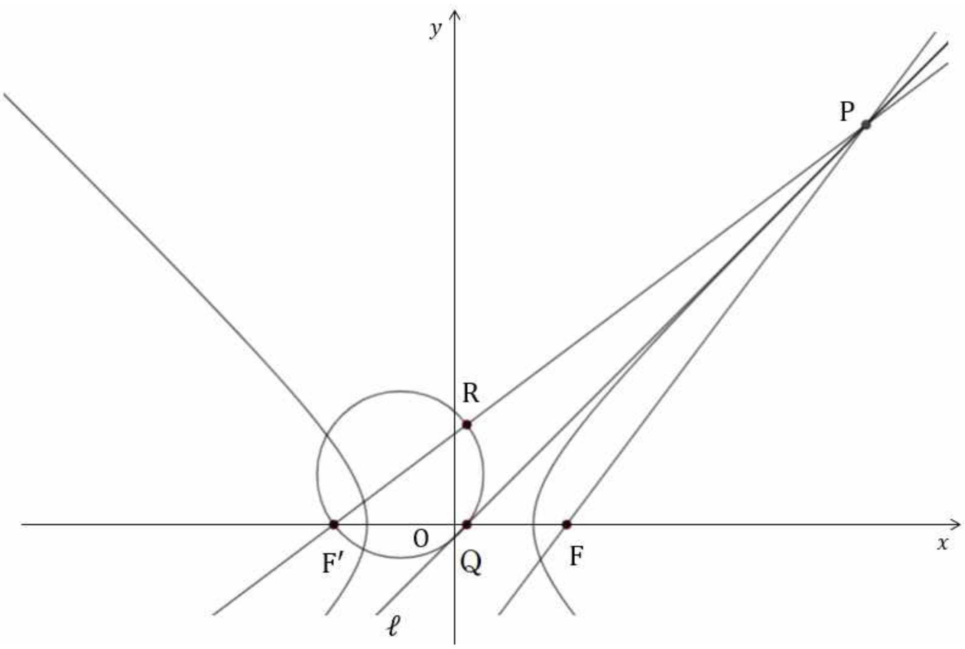
2025학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제
[창의인재/의예과 수학]

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 두 초점 F, F′ 사이의 거리가 14이고 주축의 길이가 10인 쌍곡선이 있다.

(나) 다음 그림과 같이 쌍곡선 위의 점 P에서 그은 직선 ℓ이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 이때 점 Q의 x좌표는 양수이고 직선 ℓ은 $\angle \mathrm{FPF'}$을 이등분한다. 선분 PF′위에 $\overline{\mathrm{F'R}}=10$을 만족시키는 점을 R이라고 하면 $\overline{\mathrm{F'R}}$을 지름으로 하는 원이 점 Q를 지난다. (단, 점 P는 좌표평면의 제 1사분면 위에 놓인다.)



[문제 1-1] 제시문에서 주어진 $\angle \mathrm{FPF'}=\theta$라 하자. 함수 $f(x)=\dfrac{5}{\theta}(5x-2)^3$에 대하여 다음 정적분의 값을 구하시오. (15점)

$$\int_0^{\theta} x\cos x\, f'(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$$

[문제 1-2] 제시문에서 선분 RF를 2:1로 내분하는 점을 D라 하자. 직선 PR에 대한 점 D의 대칭점을 E라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PF}}=\vec{b}$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=k\vec{a}+l\vec{b}$일 때, $k+l$의 값을 구하시오. (단, k, l은 실수이다) (15점)

[출제의도]

[문제 1-1] 본 문제는 쌍곡선의 뜻을 알고 코사인 법칙을 이용하는 것과 부분적분법과 치환적분법을 활용하는 능력을 측정하고자 하였다.

[문제 1-2] 평면 벡터의 연산과 내적을 알고 활용하는 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

[문제 1-1] 쌍곡선의 개념을 사용하여 $\cos\theta = \frac{24}{25}$를 구하고 부분적분법과 치환적분법을 사용하여 $\int_0^{\theta} x\cos x f'(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$을 계산한다.

[문제 1-2] 선분 RF를 $2:1$으로 내분하는 성질을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$를 구하고, 내적을 이용하여 k, l을 구한다.

[예시답안]

[문제 1-1] (답) $-\frac{27}{25}$

(풀이) 두 초점 F, F' 사이의 거리가 14이고 주축의 길이가 10인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$이다. (이유: 초점 $\mathrm{F}(7,0), \mathrm{F}'(-7,0)$이고 $25+24=7^2$)

이 쌍곡선에 대해 다음 기본 성질이 성립된다.

① P가 쌍곡선 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{F'P}} - \overline{\mathrm{FP}} = 10$이다. 이때 $\overline{\mathrm{F'R}} = 10$이므로 $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PF}}$가 성립된다. 그러면 $\triangle\mathrm{PRF}$는 이등변 삼각형이다.

② Q가 선분 $\mathrm{F'R}$을 지름으로 하는 원 위에 있으므로 $\angle\mathrm{F'QR} = \frac{\pi}{2}$이 되고 결과적으로 $\angle\mathrm{FQR} = \frac{\pi}{2}$가 된다.

이로부터 다음 성질이 성립한다.

$\triangle\mathrm{PQR} \equiv \triangle\mathrm{PQF}$ (이유: $\overline{\mathrm{PQ}}$는 공통, $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PF}}$, $\angle\mathrm{RPQ} = \angle\mathrm{FPQ}$이므로 SAS 합동)이므로 다음이 성립된다.

(i) $\overline{\mathrm{RQ}} = \overline{\mathrm{FQ}}$

(ii) $\angle\mathrm{PQR} = \angle\mathrm{PQF}$이고 $\angle\mathrm{FQR} = \frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{PQR} = \angle\mathrm{PQF} = \frac{\pi}{4}$이 성립되며 결과적으로 접선 ℓ의 기울기는 $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$이다.

Q(1,0)을 보인다.

Q를 $(k,0)\,(k>0)$라고 하면 $\overline{\mathrm{F'Q}}=7+k$, $\overline{\mathrm{FQ}}=7-k$이고, '③ (ⅰ)' 식에 의해 $\overline{\mathrm{RQ}}=7-k$가 된다. 그러면 삼각형 $\triangle\mathrm{RQF'}$은 직각삼각형이므로 $10^2=(7+k)^2+(7-k)^2$을 만족한다. 따라서 $k=1$이다.

$\cos\theta=\dfrac{24}{25}$를 보인다.

③과 ④에 의해 직선 ℓ의 방정식은 $y=x-1$이다. 이 식을 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{24}=1$에 대입하여 풀면 점 P의 좌표는 $(25,24)$이다.

$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{(25-7)^2+24^2}=30$, $\overline{\mathrm{F'P}}=\sqrt{(25+7)^2+24^2}=40$, $\overline{\mathrm{FF'}}=14$이므로

$\cos\theta=\dfrac{30^2+40^2-14^2}{2\times30\times40}=\dfrac{24}{25}$이다.

$\displaystyle\int_0^\theta x\cos x f'(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$을 계산한다.

(ⅰ) $[xf(\sin x)]'=f(\sin x)+x\cos x f'(\sin x)$이므로 $\displaystyle\int_0^\theta x\cos x f'(\sin x)\,dx$에 부분적분법을 적용하면 다음이 성립한다.

$$\int_0^\theta x\cos x f'(\sin x)\,dx=[xf(\sin x)]_0^\theta-\int_0^\theta f(\sin x)\,dx=\theta f(\sin\theta)-\int_0^\theta f(\sin x)\,dx-$$

(ⅱ) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$에서 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$로 치환하면 다음 식이 성립한다.

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=-\int_\theta^0 f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt=-\int_\theta^0 f(\sin t)\,dt=\int_0^\theta f(\sin t)\,dt$$

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)를 사용하여 주어진 식을 구하면 다음과 같다.

$$\int_0^\theta x\cos x f'(\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\theta f(\sin\theta)-\int_0^\theta f(\sin x)\,dx+\int_0^\theta f(\sin t)\,dt=\theta f(\sin\theta)$$

$=\theta f\left(\dfrac{7}{25}\right)$ (이유: $\cos\theta=\dfrac{24}{25}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $\sin\theta>0$이므로)

$=5\left(-\dfrac{3}{5}\right)^3=-\dfrac{27}{25}$ (이유: $f(x)=\dfrac{5}{\theta}(5x-2)^3$이므로)

[문제 1-2] (답) $\frac{71}{75}$

(풀이)

① $\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PR}}+2\overrightarrow{\mathrm{PF}}}{3}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

② $l=-\frac{2}{3}$을 보인다.

$\angle\mathrm{DPR}=\angle\mathrm{EPR}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{PE}}=m\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ (m은 0이 아닌 실수)로 쓸 수 있으므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+(k\vec{a}+l\vec{b})=m\vec{a}$$

$$\left(\frac{1}{3}+k-m\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+l\right)\vec{b}=\vec{0}$$

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 평행이 아니므로 위 식이 성립하려면 $\frac{1}{3}+k-m=0, \frac{2}{3}+l=0$이다. 즉, $k\neq-\frac{1}{3}, l=-\frac{2}{3}$이다.

③ $k=\frac{121}{75}$

$\overline{\mathrm{PD}}=\overline{\mathrm{PE}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=k\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$에 대해서 $\overrightarrow{\mathrm{PD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PE}}$이 성립한다. 따라서

$$\left(\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)=\left(k\vec{a}-\frac{2\vec{b}}{3}\right)\cdot\left(k\vec{a}-\frac{2\vec{b}}{3}\right)$$

$\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}=k^2|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2-\frac{4}{3}k\vec{a}\cdot\vec{b}$ ---(*)

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$이고 $\cos\theta=\frac{24}{25}$이므로 (이유: [문제 1-1] 풀이에서 계산)

식 (*)는 다음과 같다: $225k^2-288k-121=0$ 즉, $(3k+1)(75k-121)=0$

따라서 $k=\frac{121}{75}$ (이유: (풀이2) ②에서 $k\neq-\frac{1}{3}$이므로)

(다른 풀이)

① 점들의 좌표를 구한다.

$\mathrm{P}(25,24), \mathrm{F}(7,0), \mathrm{R}(1,6), \mathrm{D}(5,2), \mathrm{E}\left(-\frac{43}{25},\frac{274}{25}\right)$

② 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}, \overrightarrow{\mathrm{PF}}, \overrightarrow{\mathrm{PE}}$를 성분으로 나타낸다.

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\langle 1,6\rangle-\langle 25,24\rangle=\langle -24,-18\rangle$,

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{PF}}=\langle -18,-24\rangle$, $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\left\langle -\frac{668}{25},-\frac{326}{25}\right\rangle$

③ $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}+l\overrightarrow{\mathrm{PF}}$, 즉 $\left\langle -\frac{668}{25},-\frac{326}{25}\right\rangle=k\langle -24,-18\rangle+l\langle -18,-24\rangle$을 만족하는 k, l을 구한다.

$k=\frac{121}{75}$, $l=-\frac{2}{3}$

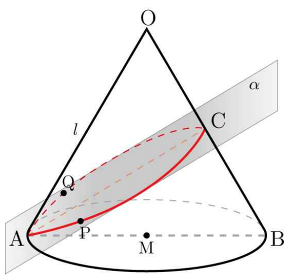
【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 아래의 <그림 1>과 같이 모선의 길이가 l, 밑면인 원의 중심이 M인 원뿔이 있다. 원뿔의 밑면인 원의 둘레 위의 두 점 A, B를 잇는 선분 AB는 점 M을 지난다. 점 A를 지나고 직선 OB에 수직인 평면 α가 선분 OB와 만나는 점을 C라 하자. 점 C는 선분 OB를 이등분한다. 평면 α와 원뿔이 만나는 교선 위에 점 P가 있다. 직선 AC에 대한 점 P의 대칭점을 Q라 하자.

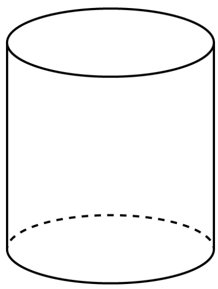
(나) 아래의 <그림 2>와 같이 원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면의 반지름은 제시문 (가)의 원뿔의 밑면의 반지름과 같고, 이 원기둥의 높이는 제시문 (가)의 원뿔의 높이와 같다.

(다) 아래의 <그림 3>과 같이 제시문 (나)의 원기둥 안에 제시문 (가)의 원뿔이 있다. 점 O를 포함하는 원기둥의 밑면을 포함하는 평면을 β라 하자.

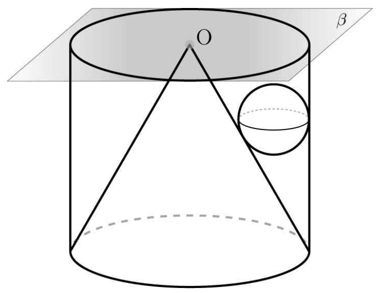
(라) 제시문 (다)에서 만든 도형에서 원뿔의 위쪽에 n개의 구가 있다. 모든 구는 평면 β와 만나지 않고, 모든 구의 중심은 한 평면 위에 있다. 모든 구는 양옆에 있는 구와 서로 한 점에서 만난다. 모든 구는 원뿔의 모선과 접하고, 원기둥과 한 점에서 만난다. (단, n은 짝수이다.)



<그림 1>



<그림 2>



<그림 3>

(마) 자연수 $x = 3, 4, \ldots, 10$에 대해서, $\sin(\pi/x)$와 $1/\sqrt{x}$의 근사값은 다음의 표와 같다.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sin(\pi/x)$	0.8660	0.7071	0.5878	0.5000	0.4339	0.3827	0.3420	0.3090
$1/\sqrt{x}$	0.5774	0.5000	0.4472	0.4082	0.3780	0.3536	0.3333	0.3162

[문제 2-1] 제시문 (가)에서 직선 OP가 원뿔의 밑면과 만나는 점을 K, $\angle \mathrm{AMK} = \theta$, 선분 PQ의 길이를 $f(\theta)$, 호 AK의 길이를 $g(\theta)$라고 하자. 이때 $L(\theta) = \dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}$와 극한 $\lim\limits_{\theta \to 0+} L(\theta)$을 각각 구하시오. (15점)

[문제 2-2] 제시문 (라)를 만족하는 구의 반지름은 n에 대한 함수로 나타낼 수 있다. 이때 구의 반지름을 최대로 하는 n의 값을 구하시오. (15점)

[출제의도]

공간도형에 대한 이해도 및 삼각함수에 대한 지식과 그 응용력을 측정하고자 하였으며 계산 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 2-1) 원뿔에서 삼각형 OAB가 정삼각형임을 찾는다. 점 P에서 원뿔의 밑면에 수선의 발 J를 내리고 점 P에서 삼각형 ABC가 만드는 평면에 수선의 발 H를 내린다. 삼수선의 정리를 사용하여 밑면으로부터 점 H의 거리 h_1과 밑면으로부터 점 P의 거리 h_2가 같음을 찾는다. 각도 θ와 $\overline{\mathrm{MJ}}=t$를 사용하여 선분 PQ의 길이, 호 AK의 길이, h_1과 h_2를 표현하고 $h_1=h_2$를 사용하여 t를 θ로 표현한다. θ를 사용하여 $f(\theta)$, $g(\theta)$를 찾아 $L(\theta)$를 찾고, $\lim_{\theta\to 0+}\sin(\theta)/\theta=1$을 사용하여 극한을 계산한다.

(문제 2-2) 모든 구의 중심을 지나는 평면에 의해 잘린 단면과 구의 접하는 성질로부터 구의 개수 n에 대한 구의 반지름 r 식을 찾는다. 세 점 (1) 구와 원뿔의 교점, (2) 구와 원기둥의 접점, (3) 구의 중심을 지나는 평면으로 자른 입체도형의 단면으로부터 문제의 구가 평면 β 아래에 있기 위한 조건을 구하자. n에 대한 구의 반지름 식을 이 조건에 대입하면 부등식 $1/\sqrt{3} > \sin(\pi/n)$을 얻는다. 제시문의 표에 의해서 $n=6$이다.

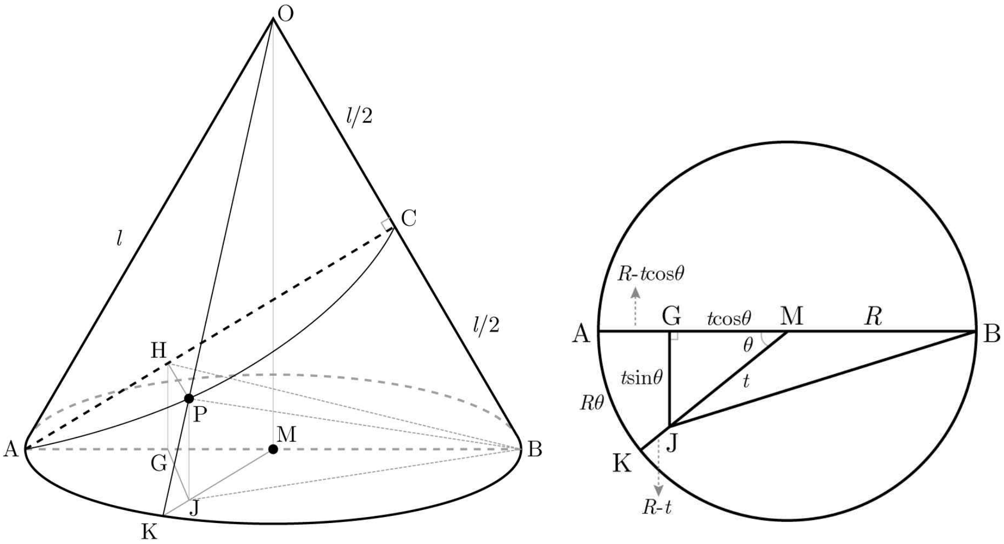
[예시답안]

(문제 2-1)

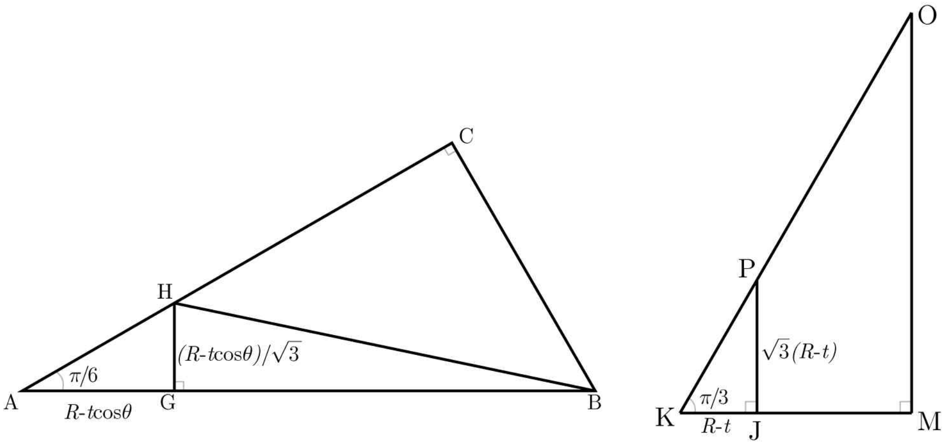
- 삼각형 OAB에서 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$이고 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로, $\Delta\mathrm{OAB}$는 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AB}}$인 이등변삼각형이다. 또한, 원뿔에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=l$이므로 $\Delta\mathrm{OAB}$는 정삼각형이다.
- 원뿔의 밑면을 이루는 원의 반지름의 길이를 R이라고 하자. $\Delta\mathrm{OAB}$는 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2R=l$이고, $\angle\mathrm{CAB}=\pi/6$이다.

- 다음과 같이 보조선을 긋자.
  (1) 점 P에서 삼각형 ABC가 만드는 평면에 내린 수선의 발 H
  (2) 점 H에서 원뿔의 밑면에 내린 수선의 발 G
  (3) 점 P에서 원뿔의 밑면에 수선의 발 J
- 다음과 같이 서로 수직인 관계를 찾을 수 있다.
  (1)에 의해서 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{HA}}$ ($\because$ 선분 AH는 평면 위의 선분)
  (1)과 (2)에 의해서 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{HG}}$
  (2)에 의해서 $\overline{\mathrm{HG}}\perp\overline{\mathrm{GJ}}$ ($\because$ 선분 GJ는 평면 위의 선분),
  (3)에 의해서 $\overline{\mathrm{PJ}}\perp\overline{\mathrm{JM}}$, $\overline{\mathrm{PJ}}\perp\overline{\mathrm{JG}}$ ($\because$ 선분 JM, 선분 JG는 평면 위의 선분)

- 사각형 HGJP에서, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{HG}}$, $\overline{\mathrm{HG}}\perp\overline{\mathrm{GJ}}$, $\overline{\mathrm{PJ}}\perp\overline{\mathrm{JG}}$이므로 $\overline{\mathrm{HP}}\perp\overline{\mathrm{PJ}}$이다.
  그러므로 사각형 HGJP는 직사각형이고, $\overline{\mathrm{HG}}=\overline{\mathrm{PJ}}$이다.



- 삼각형 GMJ에서 $\angle \mathrm{AMK}=\theta$, $\overline{\mathrm{MJ}}=t$라고 하자.
- 호 AK에서 중심각의 크기가 $\angle \mathrm{AMK}=\theta$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AM}}=R=l/2$이므로, $g(\theta)=R\theta$이다.
- 직각삼각형 MGJ에서 $\angle \mathrm{GMJ}=\theta$, $\overline{\mathrm{MJ}}=t$, $\angle \mathrm{MGJ}=\pi/2$이므로, $\overline{\mathrm{JG}}=t\sin\theta$이다.
- 직사각형 HGJP에서 $\overline{\mathrm{JG}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로, $\overline{\mathrm{JG}}=\overline{\mathrm{PH}}=t\sin\theta$이다.
- 점 Q는 점 P의 직선 AC에 대한 대칭점이고 점 H는 점 P의 선분 AC 위로의 수선의 발이므로, $\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PH}}=2t\sin\theta$이다.
- 그러므로, $L(\theta)=\dfrac{f(\theta)}{g(\theta)}=\dfrac{2t\sin\theta}{R\theta}$이다.



- 직각삼각형 MGJ에서 $\overline{\mathrm{GM}}=t\cos\theta$, $\overline{\mathrm{MJ}}=t$, 반지름 $\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MK}}=R$이므로, $\overline{\mathrm{GA}}=R-t\cos\theta$, $\overline{\mathrm{JK}}=R-t$이다.
- 직각삼각형 AGH에서 $\overline{\mathrm{AG}}=R-t\cos\theta$, $\angle \mathrm{AGH}=\pi/2$이므로, $\overline{\mathrm{HG}}=(R-t\cos\theta)/\sqrt{3}$이다.
- 직각삼각형 KJP에서 $\overline{\mathrm{KJ}}=R-t$, $\angle \mathrm{KJP}=\pi/2$이므로, $\overline{\mathrm{PJ}}=\sqrt{3}(R-t)$이다.
- 직사각형 HGJP에서 $\overline{\mathrm{HG}}=\overline{\mathrm{PJ}}$이므로, $\overline{\mathrm{HG}}=(R-t\cos\theta)/\sqrt{3}=\overline{\mathrm{PJ}}=\sqrt{3}(R-t)$

$$\Rightarrow\ t=\frac{2R}{3-\cos\theta}$$

- 그러므로, $L(\theta)=\dfrac{2t\sin\theta}{R\theta}=\dfrac{4\sin\theta}{\theta(3-\cos\theta)}$이고, 극한 $\lim\limits_{\theta\to 0+}L(\theta)$은 다음과 같다.

$$\lim_{\theta\to 0+} L(\theta) = \lim_{\theta\to 0+} \frac{4\sin\theta}{\theta(3-\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\sin\theta}{\theta}\frac{4}{3-\cos\theta} = 2$$

(문제 2-2)

- 삼각형 OAB에서 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$이고 $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로, $\Delta\mathrm{OAB}$는 $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{AB}}$인 이등변삼각형이다. 또한, 원뿔에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=l$이므로 $\Delta\mathrm{OAB}$는 정삼각형이다.
- 원뿔의 밑면을 이루는 원의 반지름의 길이를 R이라고 하자. $\Delta\mathrm{OAB}$는 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2R=l$이다.

문제의 구가 양옆에 있는 구와 서로 외접하고, 원기둥의 안쪽 면과 접하는 조건을 사용하기 위해 모든 구의 중심을 지나는 평면을 고려하자. (그림 2-2-1)

- 모든 구의 중심을 지나는 평면은 원뿔의 밑면과 평행하다. 이 평면에 의해 원기둥이 잘린 단면은 원이다. 이 원을 $\mathrm{O_1}$이라 하자. 원 $\mathrm{O_1}$의 반지름은 R이다.
- 이 평면에 의해 구가 잘린 단면은 원이다. 이 원을 $\mathrm{O_2}$이라 하자. 원 $\mathrm{O_2}$의 반지름을 r이라 하자.
- n개의 원 $\mathrm{O_2}$의 중심은 한 변의 길이가 $2r$인 정n각형을 이룬다. 이 정n각형의 중심과 각 꼭짓점을 이어 만든 삼각형은 이등변삼각형이 되며, 원 $\mathrm{O_2}$의 중심이 되는 꼭짓점에서의 각도는 $2\pi/n$이다.
- 원 $\mathrm{O_1}$의 중심에서 원 $\mathrm{O_2}$에 접선을 긋자. 이 접선과 두 원 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$의 중심을 이은 직선이 이루는 각을 θ_2라 하자. $\theta_2=\pi/n$이다.
- 사잇각이 θ_2인 직각삼각형에서, 각 θ_2의 대변의 길이는 r이므로 빗변의 길이는 $r/\sin\theta_2$이다.
- 원 $\mathrm{O_1}$의 반지름의 길이는 R이므로,

$$R=\frac{r}{\sin\theta_2}+r=\left(1+\frac{1}{\sin(\pi/n)}\right)r=\frac{1+\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}r \Rightarrow r=\frac{R\sin(\pi/n)}{1+\sin(\pi/n)}$$ 이다.

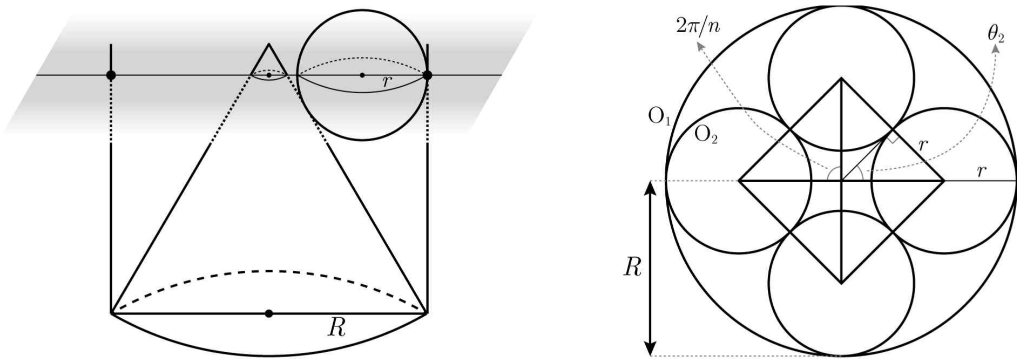


그림 (2-2-1)

원뿔과 원기둥에 모두 접하는 구가 평면 β 아래에 있기 위한 조건을 구하자. 구와 원뿔의 교점, 구와 원기둥의 접점, 구의 중심을 지나는 평면을 γ라 하자. 주어진 입체도형을 평면 γ로 자른 단면을 고려하자. (그림 2-2-2)

- 구와 원뿔의 접점 V와 직선 OM에 수직인 직선이 원기둥의 옆면과 만나는 점을 Y라 하자. 구의 중심 U에서 직선 VY에 내린 수선의 발을 W라 하자.
- 직각삼각형 UVW에서 $\angle\mathrm{UVW}=\pi/6$, $\overline{\mathrm{UV}}=r$, $\angle\mathrm{UWV}=\pi/2$이므로 $\overline{\mathrm{VW}}=\sqrt{3}r/2$, $\overline{\mathrm{UW}}=r/2$이다.
- 직각삼각형 VXY에서 $\angle\mathrm{VXY}=\pi/6$, $\overline{\mathrm{VY}}=r+r\sqrt{3}/2$, $\angle\mathrm{XYV}=\pi/2$이므로 $\overline{\mathrm{XY}}=r\sqrt{3}(1+\sqrt{3}/2)$이다.
- 그러므로 $\overline{\mathrm{U_2W_2}}=\overline{\mathrm{U_2U}}+\overline{\mathrm{UW}}+\overline{\mathrm{WW_2}}=r+r/2+r\sqrt{3}(1+\sqrt{3}/2)=(3+\sqrt{3})r$이다.

구가 평면 β와 만나지 않기 위해서는 $\overline{\mathrm{OM}} > \overline{\mathrm{U_2W_2}}$이어야 한다.

$$\sqrt{3}R = \overline{\mathrm{OM}} > \overline{\mathrm{U_2W_2}} = (3+\sqrt{3})r = \frac{R(3+\sqrt{3})\sin(\pi/n)}{1+\sin(\pi/n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3} > \frac{(3+\sqrt{3})\sin(\pi/n)}{1+\sin(\pi/n)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} > \frac{\sin(\pi/n)}{1+\sin(\pi/n)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < \frac{1+\sin(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3}+1 < \frac{1}{\sin(\pi/n)}+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} > \sin(\pi/n)$$

제시문 (마)의 표에 의해서 $1/\sqrt{3} \approx 0.5774$이고, $\sin(\pi/5) \approx 0.5878$, $\sin(\pi/6) = 0.5000$이므로 $n = 6$이다.

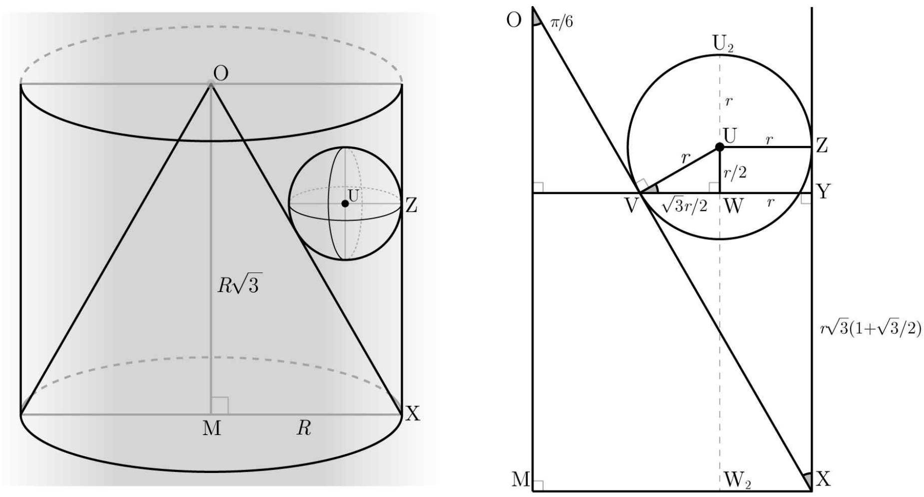


그림 (2-2-2)