2024학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제[창의인재]

==

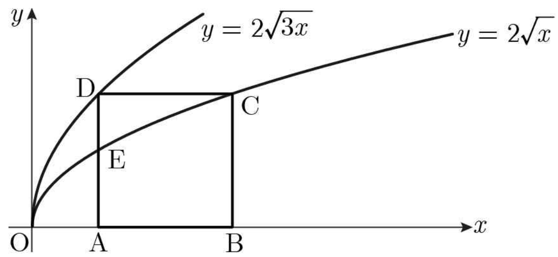
【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 닫힌구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는 다음과 같다. 단, $S(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이다.

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

(나) 함수 $y = f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다. 예를 들어 함수 $y = 2\sqrt{3x}$와 $y = 2\sqrt{x}$는 모두 무리함수이다.

(다) 두 무리함수 $y = 2\sqrt{3x}$, $y = 2\sqrt{x}$의 그래프가 다음 그림과 같다.



(라) 점 $\mathrm{A}(p, 0)$에서 x축에 수직인 직선을 그어 함수 $y = 2\sqrt{3x}$와 만나는 점을 D라 하고, 선분 AD를 한 변으로 하는 정사각형 ABCD를 만들면 점 C는 함수 $y = 2\sqrt{x}$의 그래프 위에 있다.

(마) 도형 CDE를 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 선분 CD에 수직인 평면으로 자른 단면은 정삼각형이다.

[문제 1-1] 제시문 (라)의 양수 p의 값을 구하시오. (15점)

[문제 1-2] 유리수 m, n에 대해서, 제시문 (마)의 입체도형의 부피는 $m + n\sqrt{3}$이다. 이 때 $m + n$의 값을 구하시오. (15점)

[출제의도]

 무리함수에 대한 이해도, 무리식의 계산 능력, 그리고 정적분을 사용하여 입체도형의 부피를 구하는 능력을 평가하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 1-1) 정사각형의 한 변의 길이를 q라하고, 점 B의 y좌표와 점 D의 y좌표가 같음을 이용하여 $x=p$, $x=p+q$일 때의 무리함수의 값을 각각 계산하여 p와 q의 관계식을 얻는다. 이 관계식을 점 B에서의 무리함수에 넣어 무리식을 계산하여 p와 q를 구한다.

(문제 1-2) 임의의 점 x에서 입체도형의 단면을 이루는 정삼각형의 한 변의 길이를 구하고, 이를 이용하여 삼각형의 넓이 $S(x)$를 구한다. 제시문 (가)의 공식에 $S(x)$를 대입하여 부피를 구한다.

[예시답안]

(문제 1-1)

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 q라고 하면, 점 B의 좌표는 $(p+q, 0)$이다.

정사각형의 모든 변의 길이는 같으므로 점 D의 y좌표는 q이다. 또한, 점 D는 함수 $y=2\sqrt{3x}$ 위의 점이므로 점 D의 y좌표는 $y=2\sqrt{3p}$이다. 따라서 $q=2\sqrt{3p}$이다.

위와 동일한 방법으로 점 B의 y좌표를 구하면, $q=2\sqrt{p+q}$이다.

그러므로 $q=2\sqrt{3p}=2\sqrt{p+q}$이다. 양변을 제곱하고 p에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3p} &= 2\sqrt{p+q} \\ 12p &= 4(p+q) \\ 8p &= 4q \\ p &= q/2 \end{aligned}$$

위에서 구한 $p=q/2$를 다시 $q=2\sqrt{3p}$에 대입하면 $q=2\sqrt{3q/2}$를 얻는다. 양변을 제곱하고 q에 대해서 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q &= 2\sqrt{3q/2} \\ q^2 &= 12q/2 \\ q &= 6 \end{aligned}$$

그러므로 $q=6$이고 p에 대한 관계식 $p=q/2$에 의해서 $p=3$이다.

(문제 1-2)

닫힌구간 $[p, p+q]$ 또는 $[3, 9]$의 임의의 점 x에서 입체도형의 단면을 이루는 정삼각형의 한 변의 길이 $\ell(x)$는 다음과 같다.

$$\ell(x)=q-2\sqrt{x}=6-2\sqrt{x}$$

그러므로, 단면의 넓이가 $S(x)$는 정삼각형의 넓이 공식에 의해 다음과 같다.

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\ell(x)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2\sqrt{x})^2$$

이 때, $S(x)$는 닫힌구간 $[3,9]$에서 연속이다. 그러므로 제시문 (나)에 의해서 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{p}^{p+q} S(x)\,dx = \int_{3}^{9} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(6-2\sqrt{x}\right)^{2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{3}^{9}\left(36-24\sqrt{x}+4x\right)\,dx \\
&= \sqrt{3}\left[\ 9x - 4x^{3/2} + x^{2}/2\ \right]_{3}^{9} \\
&= \sqrt{3}\left[\ 9(9-3) - 4(9^{3/2}-3^{3/2}) + (9^{2}-3^{2})/2\ \right] \\
&= \sqrt{3}\left[\ 54 - 4(27-3\sqrt{3}) + (81-9)/2\ \right] \\
&= \sqrt{3}\left(\ 54 - 108 + 12\sqrt{3} + 36\ \right) \\
&= \sqrt{3}\left(\ 12\sqrt{3} - 18\ \right) \\
&= 36 - 18\sqrt{3} \\
&= m + n\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \ m = 36,\ n = -18 \ \Rightarrow\ m+n = 18$$

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

(가) 극한값 $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$과 $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$이 성립한다.

(나) 함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

이다. 또한 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

[문제 2-1] 도함수의 정의를 이용하여, 함수 $y = \cos 2x$의 도함수를 유도하시오. (15점)

[문제 2-2] 함수가 $f(x) = e^{-x} \cos 2x$일 때, 도함수의 정의를 이용하여, 극한값

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(2023x) - 2023]$을 구하시오. (15점)

[출제의도]

도함수의 정의를 이용하여, 삼각함수의 도함수를 유도하고, 주어진 함수의 규칙성을 파악하여 극한값을 구하는 논리적인 문제풀이능력을 평가하고자 하였다.

[문항해설]

[문제 2-1] 도함수의 정의를 이용하여, 함수 $y = \cos 2x$의 도함수를 유도하시오. (15점)

(해설)

제시문에 있는 도함수의 정의를 이용하여, 함수 $y = \cos 2x$의 도함수를 단계적으로 유도한다.

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h}$$

$$= \cdots$$

$$= -2\sin 2x$$

[문제 2-2] 함수가 $f(x) = e^{-x}\cos 2x$일 때, 도함수의 정의를 이용하여, 극한값

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left[f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(2023x) - 2023\right]$$

을 구하시오. (15점)

(해설)

함수 $f(x) = e^{-x}\cos 2x$에서 $f(0) = 1$ 이다. 또한

$f'(x) = -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x$이므로 $f'(0) = -1$ 이다.

도함수의 정의를 이용하기 위하여,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left[f(kx) - f(0)\right] = \lim_{x \to 0} \frac{f(kx) - f(0)}{kx - 0} \times k = kf'(0)$$ 을 이용하여,

극한값 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left[f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(2023x) - 2023\right]$를 단계적으로 계산한다.

[예시답안]

[문제 2-1] 도함수의 정의를 이용하여, 함수 $y = \cos 2x$의 도함수를 유도하시오. (15점)

(풀이)

도함수의 정의에 의하여, 함수 $y = \cos 2x$의 도함수는

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2x\,(\cos 2h - 1)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2x \sin 2h}{h}$$

$$= \cos 2x \left(\lim_{h \to 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} \right) - \sin 2x \left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{h} \right),$$

여기서 $\lim_{h \to 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos 2h - 1}{2h} \times 2 = 0$과

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times 2 = 2$을 이용하면,

$$= -2\sin 2x$$

[문제 2-2] 함수가 $f(x) = e^{-x}\cos 2x$일 때, 도함수의 정의를 이용하여, 극한값

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(2023x) - 2023]$$

을 구하시오. **(15점)**

(풀이)

함수 $f(x) = e^{-x}\cos 2x$에서 $f(0) = 1$ 이다. 또한

$f'(x) = -e^{-x}\cos 2x - 2e^{-x}\sin 2x$이므로 $f'(0) = -1$ 이다.

도함수의 정의를 이용하기 위하여,

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [f(kx) - f(0)] = \lim_{x \to 0} \frac{f(kx) - f(0)}{kx - 0} \times k = kf'(0)$ 을 이용하자.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [f(x) + f(2x) + f(3x) + \cdots + f(2023x) - 2023]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} [(f(x) - f(0)) + (f(2x) - f(0)) + (f(3x) - f(0)) + \cdots + (f(2023x) - f(0)]$$

$$= (1 + 2 + \cdots + 2023)\, f'(0)$$

$$= -(1 + 2 + \cdots + 2023) = -\frac{2023(2023 + 1)}{2} = -2{,}047{,}276$$

【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오(40점)

(가) 참 또는 거짓을 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 한다. 예를 들어, 문장

'a, b가 실수일 때, $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.' --- (*)

는 명제이다.

용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 정의라고 한다. 한편 정의 또는 이미 옳다고 밝혀진 성질을 이용하여 어떤 명제가 참임을 설명하는 것을 증명이라고 한다.

(나) 함수 $f: X \to Y$에서 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 f를 일대일대응이라고 한다.

① 일대일함수이다. ② 치역과 공역이 같다

(다) 다음 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.

① 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 동시에는 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

② 두 사건 A, B에서 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각의 경우에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 사건 A에 잇달아 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

[문제 3-1] 다음은 제시문 (가)에서 제시한 명제 (*)가 참임을 귀류법을 이용하여 증명하는 과정이다. (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ), (Ⅳ)를 증명 순서대로 나열하고 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 증명을 완성하시오.(10점)

(Ⅰ) 이때 세 가지 경우 모두 $a^2+b^2=0$ 이라는 가정에 모순이다.

(Ⅱ) 따라서 a, b가 실수일 때, $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.

(Ⅲ) 결론을 부정하여 $\boxed{}$ 이라고 하자.

(Ⅳ) ① $a \neq 0, b=0$이면 $a^2>0, b^2=0$ 이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \neq 0$

② $a=0, b \neq 0$이면 $a^2=0, b^2>0$ 이므로 $\boxed{}$, 즉 $\boxed{}$

③ $\boxed{}$

[문제 3-2] 제시문 (나)에서 주어진 어떤 일대일대응 $f: X \to Y$가 다음과 같이 주어질 때, $\dfrac{q}{p}$의 값을 모두 구하시오. (단, p, q는 실수) (15점)

$$X=\{x \mid -c \le x \le c,\ c>0\},\ Y=\{y \mid -8 \le y \le 0\},\ f(x)=px+q$$

[문제 3-3] 삼각형의 세 변의 길이 x_1, x_2, x_3가 자연수일 때, 다음을 만족시키는 삼각형의 개수를 구하시오. (15점)

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3,\ x_1+x_2+x_3=36$$

[출제의도]

구체적인 예를 통해 귀류법에 대한 이해력과 일대일대응, 일차함수를 구하는 능력을 평가하고자 하였다. 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구하는 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

[문제 3-1] 명제 'a, b가 실수일 때, $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.' 가 참임을 귀류법을 이용하여 증명한다. 주어진 증명을 순서대로 나열하고 빈칸에 알맞은 것을 써넣어 증명을 완성한다.

[문제 3-2] 주어진 구간 $X=\{x \mid -c \le x \le c,\ c>0\}$, $Y=\{y \mid -8 \le y \le 0\}$에서 일차함수 $f(x)=px+q$가 일대일대응일 때 $\frac{q}{p}$의 값을 모두 구한다.

[문제 3-3] 삼각형의 세 변의 길이 x_1, x_2, x_3가 자연수일 때, $x_1 \ge x_2 \ge x_3$과 $x_1+x_2+x_3=36$ 만족시키는 삼각형의 개수를 구한다.

[예시답안]

[문제 3-1] (답)

결론을 부정하여 $a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$ 이라고 하자.

$a \ne 0, b=0$이면 $a^2>0, b^2=0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \ne 0$

$a=0, b \ne 0$이면 $a^2=0, b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \ne 0$

$a \ne 0, b \ne 0$이면 $a^2>0, b^2>0$이므로 $a^2+b^2>0$, 즉 $a^2+b^2 \ne 0$

이때 세 가지 경우 모두 $a^2+b^2=0$이라는 가정에 모순이다.

따라서 a, b가 실수일 때, $a^2+b^2=0$이면 $a=0$이고 $b=0$이다.

[문제 3-2] (답) $\pm c$

(풀이) 문제의 조건을 만족시키는 일차함수는 다음 두 경우의 직선의 방정식이다.

① 두 점 $(c,0), (-c,-8)$을 지나는 직선의 방정식: 직선의 기울기는 $\frac{-8-0}{-c-c}$이고 점 $(c,0)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y-0=\frac{8}{2c}(x-c)$이다. 즉, $y=\frac{4}{c}x-4$

② 두 점 $(-c,0), (c,-8)$을 지나는 직선의 방정식: 직선의 기울기는 $\frac{-8-0}{c-(-c)}$이고 점 $(-c,0)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y-0=\frac{-8}{2c}(x+c)$이다. 즉, $y=-\frac{4}{c}x-4$

따라서 $\frac{q}{p}=\pm c$이다.

[문제 3-3] (답) 27

(풀이) $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge 1$이므로 $x_1 \ge 12$이다. 또 삼각형의 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 길어야하므로 $x_1<18$이다. 즉, $12 \le x_1 < 18$이므로 문제의 조건을 만족시키는 삼각형

의 세 변의 길이 x_1, x_2, x_3를 (x_1, x_2, x_3)으로 나타내자. x_1, x_2, x_3가 자연수일 때, 방정식 $x_1+x_2+x_3=36$ (단, $12 \leq x_1 < 18$)이 성립하는 각 경우의 삼각형의 세 변의 길이 (x_1, x_2, x_3)는 다음과 같다.

$x_1=12$일 때, (12, 12, 12)로 1개

$x_1=13$일 때, (13, 13, 10), (13, 12, 11)로 2개

$x_1=14$일 때, (14, 14, 8), (14, 13, 9), (14, 12, 10), (14, 11, 11)로 4개

$x_1=15$일 때, (15, 15, 6), (15, 14, 7), (15, 13, 8), (15, 12, 9), (15, 11, 10)로 5개

$x_1=16$일 때, (16, 16, 4), (16, 15, 5), (16, 14, 6), (16, 13, 7), (16, 12, 8), (16, 11, 9), (16, 10, 10)로 7개

$x_1=17$일 때, (17, 17, 2), (17, 16, 3), (17, 15, 4), (17, 14, 5), (17, 13, 6), (17, 12, 7), (17, 11, 8), (17, 10, 9)로 8개

따라서 구하는 삼각형의 개수는 1+2+4+5+7+8=27개이다.