2024학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제
[창의인재/의예과 수학]

===

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(30점)

(가) 주어진 집합에 대하여 그 부분집합을 생각할 때, 처음에 주어진 집합을 전체집합이라 한다. 집합 A의 원소의 개수를 기호 $n(A)$로 나타낸다. 자연수 k에 대해서 경우의 수는 다음과 같다.

① 전체집합 $U_{k+1}=\{1, 2, \ldots, k+1\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A \cup B = U_{k+1}$과 $n(A)=2$를 만족시키는 A와 B를 기호 (A, B)로 나타낸다. 이때 (A, B)의 개수를 a_k라 하자.

② 전체집합 $U_{k+1}=\{1, 2, \ldots, k+1\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A \cup B = U_{k+1}$과 $n(A)=3$을 만족시키는 A와 B를 기호 $< A, B >$로 나타낸다. 이때 $< A, B >$의 개수를 b_k라 하자.

예를 들어 b_3을 구하는 데 사용한 $< A, B >$의 어떤 A, B는 아래 표와 같이 나타낼 수 있다.

	A	B
$< A, B >$	$\{1, 2, 3\}$ $\vdots$	$\{4\}$ $\vdots$

(나) 다음 식이 성립하는 양수 $c_1, c_2, \ldots, c_k$가 존재한다.

$$b_1 = 0, \quad b_{k+1} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_k a_k \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

[문제 1-1] 제시문 **(나)**에서 주어진 c_2를 구하고, b_3을 구하는 데 사용된 $< A, B >$를 모두 찾으시오. (15점)

[문제 1-2] 제시문 **(나)**에서 주어진 상수들의 곱 $c_1 c_2 \cdots c_k$를 구하고, 그 이유를 명확히 쓰시오. (15점)

[출제의도]

집합 개념과 포함관계를 이해하고 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 계산하는 능력과 조합의 수를 구하는 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

[문제 1-1] $U_3=\{1,2,3\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A\cup B=U_3$과 $n(A)=2$을 만족시키는 (A,B)의 개수를 구하고 $U_3=\{1,2,3,4\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A\cup B=U_4$과 $n(A)=3$을 만족시키는 $<A,B>$의 개수를 구한다. 이를 이용하여 c_2를 구하고 b_3을 구하는 데 사용된 $<A,B>$를 모두 찾는다.

[문제 1-2] a_k와 b_k를 구하고 $b_{k+1}=c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_ka_k$이 성립하는 양수 $c_1,c_2,\ldots,c_k$를 구한다.

[예시답안]

[문제 1-1] (답) $c_2=2$; 〈표 2〉

(풀이) (i) $a_2=12$이 성립함을 보이자.

a_2는 $U_3=\{1,2,3\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A\cup B=U_3$과 $n(A)=2$을 만족시키는 (A,B)의 개수이다. A의 원소가 2개이므로, U_3의 부분집합 중에서 원소가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_3C_2=3$이다. 즉, $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$. 각 집합에 대해서 조건 $A\cup B=U_3$를 만족시키는 B를 구하자. 먼저 A^C의 모든 원소는 반드시 B에 속해야 한다.

① $A=\{1,2\}$이면 3은 반드시 B에 속해야 하고 A의 두 원소 1과 2는 각각 B에 속할 수도 있고 속하지 않을 수도 있다. 이때 $A=\{1,2\}$의 부분집합의 개수는 $2\times2=2^2$이고 A의 부분집합은 $\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}$이다. 각각의 부분집합에 3이 속해야 하기 때문에 B는 $\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$이 된다.

비슷한 방법으로 ② A가 $\{1,3\}$, ③ A가 $\{2,3\}$인 경우에 B를 찾으면 $a_2=3\times2^2=12$이다.

(ii) $b_3=32$이 성립함을 보이고 b_3을 구하는 데 사용된 $<A,B>$를 모두 찾는다.

b_3는 $U_3=\{1,2,3,4\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A\cup B=U_4$과 $n(A)=3$을 만족시키는 $<A,B>$의 개수이다. A의 원소가 3개이므로, U_4의 부분집합 중에서 원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_4C_3=4$이고 그 부분집합은 $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$이다. 각각의 부분집합에 대해서 조건 $A\cup B=U_4$를 만족시키는 B를 구하면 〈표 2〉와 같이 나타낼 수 있다. 예를 들어 A가 $\{1,2,3\}$이면 4은 반드시 B에 속해야 하고 A의 세 원소는 각각 B에 속할 수도 있고 속하지 않을 수도 있다. A의 부분집합의 개수는 $2\times2\times2=2^3$이고 A의 부분집합은 $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\}\ \{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$이다. 각각의 부분집합에 4가 속해야 하기 때문에 집합 B는 $\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}$이 된다. 따라서

$b_3=4\times2^3=32$이다.

(ⅲ) 등식 $b_2 = 2a_1$이 성립함을 보이자.

㉠ a_1는 $U_2 = \{1,2\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A \cup B = U_2$와 $n(A) = 2$을 만족시키는 (A, B)의 개수이다. 이때 $n(A) = 2$를 만족시키는 A는 전체집합 $U_2 = \{1,2\}$로 1가지이고 이 경우에 대하여 B는 A의 모든 부분집합이 가능하다. 따라서 $a_1 = 2^2$이다.

㉡ b_2는 $U_3 = \{1,2,3\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A \cup B = U_3$와 $n(A) = 3$을 만족시키는 $< A, B >$의 개수이다. 이때 $n(A) = 3$를 만족시키는 A는 전체집합 $U_3 = \{1,2,3\}$로 1가지이고 이 경우에 대하여 B는 A의 모든 부분집합이 가능하다. 따라서 $b_2 = 2^3$이다.

㉠과 ㉡에 의해 $b_2 = 2^3 = 2a_1$이고 $c_1 = 2$이다.

그러므로 (ⅰ)과 (ⅱ)와 (ⅲ)에 의해 $b_3 = 2a_1 + 2a_2$이므로 $c_2 = 2$ 이다.

A	B	A	B
$\{1,2,3\}$	$\{4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{3,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,4\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$
$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
$\{1,2,4\}$	$\{3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1\}$
$\{1,2,4\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,3\}$
$\{1,2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,4\}$
$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,2,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,2,4\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$

<표 2> b_3을 구하는 데 사용한 $< A, B >$

[문제 1-2] (답) $c_1 c_2 \cdots c_k = 2^k$

(풀이)(ⅰ) a_k를 구하자.

a_k는 $U_{k+1} = \{1, 2, \dots, k+1\}$의 두 부분집합 A와 B에 대해서 두 조건 $A \cup B = U_{k+1}$과 $n(A) = 2$를 만족시키는 (A, B)의 개수이다. 전체집합 U_{k+1}의 원소 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{k+1}C_2$ 이다. 그리고 $A \cup B = U_{k+1}$를 만족시키는 집합 B의 개수는 4이다. 여기에 곱의 법칙을 사용하면 다음 식을 얻는다.

$$a_k = {}_{k+1}C_2 \times 4 = 2k(k+1), \; k = 1, 2, \dots$$

비슷한 방법으로 b_k를 구하면 다음 식을 얻는다.

$$b_k = {}_{k+1}C_3 \times 8 = \frac{4}{3}(k-1)k(k+1),\ \ k=1,2,\ldots$$

(ii) $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} 2i(i+1) = 2\sum_{i=1}^{k}(i^2+i) = 2\left\{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2}\right\}$

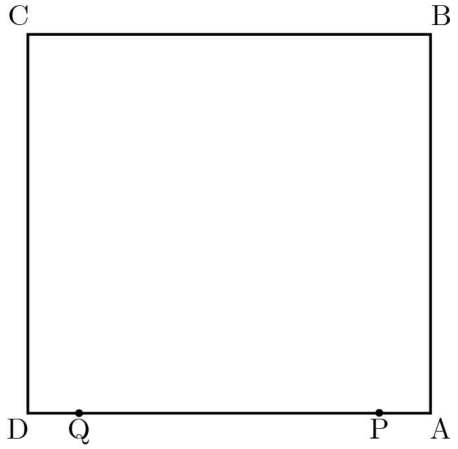
$= \frac{2}{3}k(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}b_{k+1}$이므로 $b_{k+1} = 2\sum_{i=1}^{k} a_i$ ($k=1,2,3,\ldots$).

(i)과 (ii)에 의해 $c_1 c_2 \cdots c_k = 2^k$.

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.(30점)

(가) 원주시에서 아래의 규칙 (나) - (사)를 만족하도록 평평한 땅 위에 직사각형 모양의 공원을 만든다.

(나) 아래의 그림과 같이 공원을 이루는 직사각형을 ABCD라 하자.



(다) 선분 DA의 길이는 180 m이고, 선분 DA 위에 $\overline{PA} = \overline{QD}$가 되는 지점 P, Q에 각각 국기게양대가 있다.

(라) 공원 내에 두 국기게양대로부터의 거리의 합이 180 m인 모든 곳에 황토를 깔아 황톳길 산책로를 만든다.

(마) 공원 내에 두 국기게양대로부터의 거리의 차가 60 m인 모든 곳에 꽃을 심어 꽃길을 만든다. 이 때, 꽃이 Q 지점의 국기게양대보다 P 지점의 국기게양대에 더 가깝다면 파란색 꽃을 심고, 꽃이 P 지점의 국기게양대보다 Q 지점의 국기게양대에 더 가깝다면 빨간색 꽃을 심는다.

(바) 파란 꽃길은 선분 DA 위의 한 지점에서 시작하여 점 B에서 종료한다.

(사) 황톳길과 파란 꽃길이 만나는 지점에 음수대를 만든다. 이 때, 음수대와 두 국기게양대가 만드는 삼각형은 $\overline{PQ}$를 빗변으로 하는 직각삼각형을 이룬다.

[문제 2-1] 두 국기게양대 사이의 거리와 공원의 세로 길이를 각각 구하시오. (15점)

[문제 2-2] B 지점의 지면에서 P 지점의 국기게양대의 꼭대기를 바라본 각도가 15°이고, 국기게양대의 높이를 h라고 할 때, 유리수 h_1, h_2, h_3, h_4에 대해서

$$h^2 = 1800\left(h_1 + h_2\sqrt{3} + h_3\sqrt{5} + h_4\sqrt{15}\right)$$ 이다.

이 때 $h_1 + h_2 + h_3 + h_4$의 값을 구하시오. (15점)

[출제의도]

이차곡선에 대한 이해도 및 삼각함수에 대한 지식과 그 응용력을 측정하고자 하였으며 계산 능력을 측정하고자 하였다.

[문항해설]

(문제 2-1) 초점이 같은 타원과 쌍곡선에 대해서 타원과 쌍곡선의 교점 R과 두 점 P, Q가 만드는 직각삼각형($\overline{\mathrm{PQ}}$를 빗변으로 함)에 피타고라스 정리를 적용하고, 점 R이 타원과 쌍곡선 위에 있음을 사용하여 타원의 방정식과 쌍곡선의 방정식을 구한다. 쌍곡선의 방정식이 점 B를 지남을 사용하여 선분 AB의 길이를 구한다.

(문제 2-2) P 지점에 있는 국기게양대의 꽉대기를 점 H라 하면, 삼각형 $\triangle\mathrm{PBH}$에서 탄젠트의 정의에 의해 h^2을 $\tan 15^\circ$와 $\overline{\mathrm{BP}}^2$으로 표현할 수 있다. 여기서 삼각함수의 덧셈정리 중 탄젠트의 차공식을 45도와 30에 적용하여 $\tan 15^\circ$의 값을 구할 수 있으며, 삼각형 $\triangle\mathrm{PAB}$에 피타고라스 정리를 적용하여 $\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값을 구할 수 있다.

[예시답안]

(문제 2-1)

제시문 (라)에 의해서 산책로는 게양대를 초점으로 갖고 장축의 길이가 $2a = 180$인 타원의 방정식을 따른다. 제시문 (다)에 의해서 선분 $\overline{\mathrm{DA}}$가 이 타원의 장축이 되며, 점 D와 점 A는 이 타원의 장축 방향의 양 끝점이 된다.

제시문 (마)에 의해서 꽃길은 게양대를 초점으로 갖고 주축의 길이가 $2a' = 60$인 쌍곡선의 방정식을 따른다. 제시문 (바)에 의해서 파란 꽃길은 점 B에서 만난다.

선분 $\overline{\mathrm{DA}}$ 중심을 원점으로 하고 선분 $\overline{\mathrm{DA}}$가 x축 위에 있도록 좌표평면을 정의하면, 타원의 방정식과 쌍곡선의 방정식은 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

이 때, 제시문 (라)와 (마)에 의해서 두 곡선은 모두 게양대의 위치를 초점으로 갖는다. 이 초점의 좌표를 $(-c, 0)$, $(c, 0)$라 하면, 다음을 만족한다.

$$c^2 = a^2 - b^2,\ c^2 = a'^2 + b'^2,\ \text{선분 } \overline{\mathrm{PQ}}\text{의 길이} = 2c$$

제시문 (사)에서 정의된 음수대의 위치를 점 R이라 하고, 선분 $\overline{\mathrm{PR}}$의 길이를 u, 선분 $\overline{\mathrm{RQ}}$의 길이를 v라고 하면, 제시문 (사)에 의해서 삼각형 PQR은 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$(2c)^2 = u^2 + v^2$$

또한, 점 R은 타원과 쌍곡선 위의 점이므로, 다음이 성립한다.

$$v + u = 2a,\ v - u = 2a'$$

위의 세 식을 다음과 같이 정리하여 u, v, c를 a와 a'으로 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} 4c^2 & = & u^2 + v^2 \\ 2a & = & v + u \\ 2a' & = & v - u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4c^2 & = & u^2 + v^2 \\ u & = & a - a' \\ v & = & a + a' \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ 4c^2 = (a - a')^2 + (a + a')^2 \Rightarrow c^2 = (a^2 + a'^2)/2 \Rightarrow c = \frac{\sqrt{a^2 + a'^2}}{\sqrt{2}}$$

여기에서 $a=90$, $a'=60$을 대입하여 c값을 구할 수 있다.

$$\therefore\ c=\frac{\sqrt{a^2+a'^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{90^2+30^2}}{\sqrt{2}}=30\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=30\sqrt{5}$$

타원의 방정식에서 $a=90$, $c=30\sqrt{5}$이므로 $b=\sqrt{a^2-c^2}$를 구할 수 있고, 쌍곡선의 방정식에서 $a'=30$, $c=30\sqrt{5}$이므로 $b'=\sqrt{c^2-a'^2}$를 구할 수 있다. 숫자를 대입한 결과는 다음과 같다.

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{90^2-30^2\cdot 5}=30\sqrt{9-5}=60$$
$$b'=\sqrt{c^2-a'^2}=\sqrt{30^2\cdot 5-30^2}=30\sqrt{5-1}=60$$

이제 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 x좌표가 $a=90$일 때 쌍곡선의 y좌표와 값이 같다. 쌍곡선의 방정식을 $y>0$에 관하여 정리하고 해서 $x=90$을 대입하자.

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1 \Rightarrow y=b'\sqrt{\frac{x^2}{a'^2}-1}=60\sqrt{\frac{90^2}{30^2}-1}=60\sqrt{3^2-1}=120\sqrt{2}$$

그러므로 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 $120\sqrt{2}$이다.

답을 정리해서 쓰면 다음과 같다.

두 국기게양대 사이의 거리 $=2c=60\sqrt{5}$,

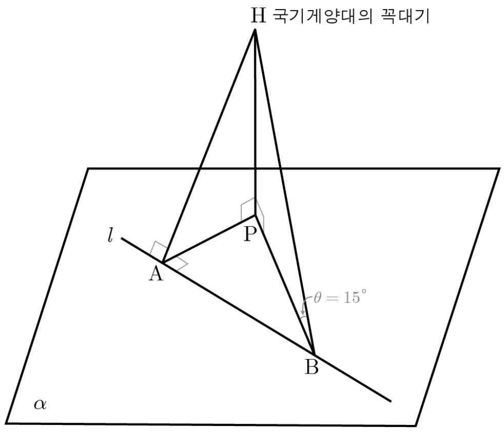
공원의 세로 길이 $=$ 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이 $=120\sqrt{2}$

(문제 2-2)

P 지점에 있는 국기게양대의 꼭대기를 점 H라 하고, 문제에서 주어진 각도 $\angle\mathrm{PBH}=15^\circ$를 θ라고 하자. 삼각형 $\triangle\mathrm{PBH}$에서 각 $\angle\mathrm{PBH}$에 대한 탄젠트 값은 $\tan\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HP}}}{\overline{\mathrm{BP}}}$이다. 그러므로 구하고자 하는 값 h^2은 다음과 같다.

$$h^2=\tan^2\theta\cdot\overline{\mathrm{BP}}^2$$

h^2을 구하기 위해 $\tan\theta$와 $\overline{\mathrm{BP}}^2$을 구하자.



첫째로 $\tan\theta=\tan 15^\circ$를 구하기 위해 다음과 같이 삼각함수의 덧셈공식을 사용하자.

$$\tan\theta=\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$
$$=\frac{1-1/\sqrt{3}}{1+1\cdot 1/\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$$

둘째로 $\overline{\mathrm{BP}}^2$을 구하기 위해 삼각형 $\triangle\mathrm{PAB}$를 관찰하자. 삼각형 $\triangle\mathrm{PAB}$는 각 $\angle\mathrm{PAB}$가 90°인 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{PA}}=a-c=90-30\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AB}}=120\sqrt{2}$이므로 피타고라스 정리에 의해서 다음과 같이 $\overline{\mathrm{BP}}^2$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BP}}^2 &= (90-30\sqrt{5})^2+(120\sqrt{2})^2\\ &= 30^2(3^2+5-2\cdot 3\sqrt{5}+4^2\cdot 2)\\ &= 1800(23-3\sqrt{5})\end{aligned}$$

위에서 구한 $\tan\theta$와 $\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값을 $h^2 = \tan^2\theta \cdot \overline{\mathrm{BP}}^2$에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h^2 &= \tan^2\theta \cdot \overline{\mathrm{BP}}^2 \\ &= (2-\sqrt{3})^2 \cdot 1800(23-3\sqrt{5}) \\ &= 1800(161-92\sqrt{3}-21\sqrt{5}+12\sqrt{15}) \end{aligned}$$

그러므로 $h_1 = 161$, $h_2 = -92$, $h_3 = -21$, $h_4 = 12$이므로

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 161 - 92 - 21 + 12 = 60$$

이다.