2023학년도 연세대학교 미래캠퍼스 논술시험 문제[창의인재]

==

【문제 1】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

> (가) 두 수열 $\{x_n\}$, $\{z_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$ (α는 상수)일 때, 수열 $\{y_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $x_n \le y_n \le z_n$이면, $\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$이다.
>
> (나) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$ 의 수렴, 발산은 급수의 n항까지의 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$의 수열 $\{S_n\}$의 수렴, 발산으로 정의한다.

[문제 1-1] 제시문 (가)를 이용하여, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right)$을 구하시오.(15점)

[문제 1-2] 제시문 (나)를 이용하여, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+3)}$ 의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 극한값을 구하시오.(15점)

[문항해설]

(문제 1−1) 자연수 n에 대하여, 부등식 $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$ $(1 \le k \le n)$를 이용한다.

그러므로

$$\frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \le \frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2+1}$$

을 이끌어내고, 제시문 (가)를 이용하면 극한값을 구할 수 있다.

(문제 1−2) 급수의 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)(2k+3)}$을 계산하면, 제시문 (나)를 이용하여, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} S_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 극한값을 구할 수 있다.

[예시답안]

[문제 1−1] (답) $\frac{1}{2}$

(풀이) 자연수 n에 대하여, $\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+k} \le \frac{1}{n^2+1}$ $(1 \le k \le n)$를 이용한다.

그러므로 다음 부등식

$$\frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \le \frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2+1}$$

가 성립한다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\cdots+n)}{n^2+1} = \frac{1}{2}$$

이므로, 제시문 (가)에 의하여,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2}$$

이다.

[문제 1−2] (답) $\frac{2}{3}$

(풀이)

자연수 n에 대하여, $\frac{2}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right)$을 이용한다. 그러므로 급수의 부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+3)}$을 구하면,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)(2k+3)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$

이다. 따라서 제시문 (나)에 의하여, 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

이고, 급수는 수렴한다.

【문제 2】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 일반적으로 함수 $h(x)$와 실수 x_0에 대하여

(1) 함수 $h(x)$가 $x=x_0$에서 정의되어 있고

(2) $\lim_{x \to x_0} h(x)$가 존재하며

(3) $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$

일 때, 함수 $h(x)$는 $x=x_0$에서 연속이라고 한다.

(나) 함수 $h(x)$가 어떤 열린구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $h(x)$는 그 열린구간에서 연속이라고 한다. 또, 어떤 열린구간에서 연속인 함수를 그 열린구간에서의 연속함수라고 한다.

(다) 실수 a, b, c, d와 양수 $k>0$에 대해서, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x < -3) \\ -x^2+9 & (-3 \le x < 0) \\ cx+d & (0 \le x) \end{cases}, \qquad g(x) = k(x-1)+12$$

[문제 2-1] 제시문 (다)에서 주어진 함수 $f(x)$와 그 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에서 연속인 함수가 되도록 하는 상수 a, b, c, d의 값을 구하고, 제시문 (다)에서 주어진 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 접하도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.(15점)

[문제 2-2] 위의 [문제 2-1]에서 구한 a, b, c, d, k에 대해서, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프와 직선 $y=0$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.(20점)

[문항해설]

(문제 2-1) $x=-3, 0$에서 함수와 도함수의 연속 조건을 사용하여 a, b, c, d를 구한다. 이차함수와 직선이 접하는 조건을 사용하여 k를 구한다.

(문제 2-2) 함수 $f(x)$와 직선 $y=0$의 교점의 x좌표, 함수 $g(x)$와 직선 $y=0$의 교점의 x좌표, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 접점의 x좌표를 구하고, 정적분을 사용하여 넓이를 구한다.

[예시답안]

(문제 2-1) $x=-3$에서 $f'(x)$가 연속이므로

$$\lim_{x\to -3+} f'(x) = -2\cdot(-3) = 6 = \lim_{x\to -3-} f'(x) = a = 6$$

그리고 $f(x)$가 연속이므로

$$\lim_{x\to -3+} f(x) = 0 = \lim_{x\to -3-} f(x) = -3a+b = -18+b = 0$$

따라서 $a=6$, $b=18$이다.

$x=0$에서 $f'(x)$가 연속이므로

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to -3+} f'(x) = c = 0$$

그리고 $f(x)$가 연속이므로

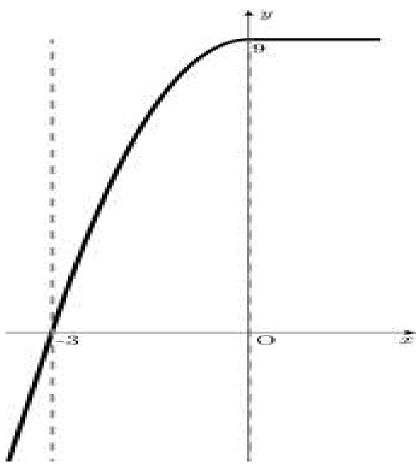
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 9 = \lim_{x\to 0-} f(x) = b = 9$$

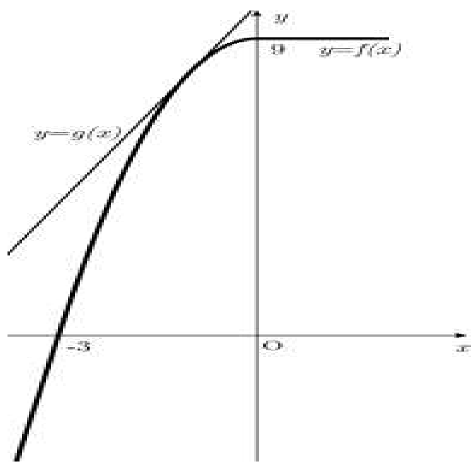
따라서 $c=0$, $d=9$이다.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 접하므로 $y=-x^2+9$와 $y=kx+12-k$는 한 점에서 만난다.

$$\begin{aligned}
&-x^2+9 = kx+12-k \\
&\Rightarrow\ 0 = x^2+kx+3-k \\
&\Rightarrow\ D = k^2+4k-12 = 0 \quad (D\text{는 판별식}) \\
&\Rightarrow\ 0 = (k-2)(k+6) \\
&\Rightarrow\ k = 2 \quad (k\text{는 양수})
\end{aligned}$$

따라서 $k=2$이다.





(문제 2-2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프와 직선 $y=0$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하기 위해 함수 $f(x)$와 직선 $y=0$의 교점의 x좌표를 구하자.

$$-x^2+9=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$$

함수 $g(x)$와 직선 $y=0$의 교점의 x좌표를 구하자.

$$2x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x=-5$$

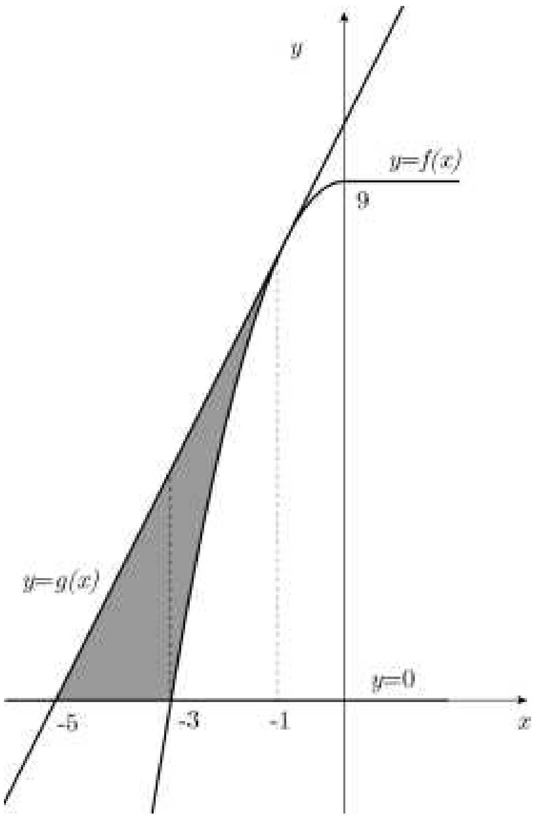
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 접점의 x좌표를 구하자.

$$2x+10=-x^2+9 \quad \Rightarrow \quad x^2+2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

정적분을 이용하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=0$으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\text{넓이} &= \int_{-5}^{-3}(g(x)-0)\ dx+\int_{-3}^{-1}(g(x)-f(x))\ dx \\
&= \int_{-5}^{-3}(2x+10)\ dx+\int_{-3}^{-1}\left[(2x+10)-(-x^2+9)\right]\ dx \\
&= \left[x^2+10x\right]_{-5}^{-3}+\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-3}^{-1} \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}$$

그러므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=0$으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\dfrac{20}{3}$이다.



【문제 3】 아래의 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (35점)

(가) 방정식 $h(x,y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $h(x-a, y-b)=0$이 된다.

(나) 실수 x의 절댓값 $|x|$는 수직선 위의 원점에서 x에 대응하는 점까지 거리를 나타낸다. 즉,

$$|x|=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

(다) 함수 $y=h(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $h(x) \geq h(a)$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극소라 하며, $h(a)$를 극솟값이라고 한다. 또, $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $h(x) \leq h(a)$일 때, 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극대라 하며, $h(a)$를 극댓값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

(라) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=x^3-2x^2-5, \quad g(x)=\frac{5}{2}\,|f(x-1)+3|$$

[문제 3-1] 제시문 (라)에서 주어진 함수 $f(x)$에 대해서 $y=f\left(2\sin\frac{x}{5}+3\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하자. $27m+M$의 값을 구하시오.(17점)

[문제 3-2] 제시문 (라)에서 주어진 함수 $g(x)$가 극값을 갖는 x의 값은 α개이다. 이때 $g(x)$의 극솟값을 모두 더한 값을 β라고 하자. $\alpha\beta$의 값을 구하시오.(18점)

[문항해설]

[문제 3-1] 사인함수 $y=2\sin\frac{x}{5}+3$의 그래프를 통해 최댓값과 최솟값을 구하고 삼차 함수의 최댓값을 M, 최솟값을 m을 구한다.
[문제 3-2] 삼차 함수의 그래프 개형을 그리고 절댓값이 있는 함수의 그래프 개형을 그려서 극대와 극소를 판정한다.

[예시답안]

[문제 3−1] (답) $27m+M=-97$

(풀이) $t=2\sin\frac{x}{5}+3$라고 하면 모든 실수 x에 대해서 $-2+3\le t\le 2+3$이다. 함수 $f\left(2\sin\frac{x}{5}+3\right)=f(t)$이므로 닫힌 구간 $[1,5]$에서 최댓값과 최솟값을 구하자.

$f'(t)=3t^2-4t=t(3t-4)$

$1\le t\le 5$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{4}{3}$이다. 닫힌 구간 $[1,5]$에서 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\searrow$	$-\frac{167}{27}\approx-6.19$	$\nearrow$	70

$f(t)$는 $t=\frac{4}{3}$에서 극솟값을 갖는다. 최대·최소 정리에 의하면

$f(1)=-6,\ f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{167}{27},\ f(5)=70$

이므로, 닫힌 구간 $[1,5]$에서 $f(t)$는 $t=\frac{4}{3}$에서 최솟값 $m=-\frac{167}{27}$, $t=5$에서 최댓값 $M=70$을 갖는다. 따라서 $27m+M=27\left(-\frac{167}{27}\right)+70=-97$이다.

[문제 3−2] (답) $\alpha\beta=15$

(풀이) $f(x)=x^3-2x^2-5$에서 $f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$이다. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

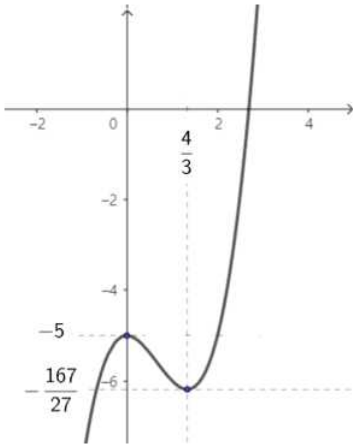
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\frac{167}{27}$	$\nearrow$

$f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=\frac{4}{3}$에서 극솟값을 갖는다. 이때 $f(0)=-5$이다(그림 1). 함수

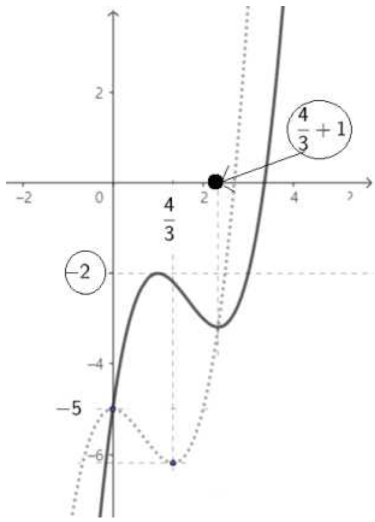
$y=f(x-1)+3$이 나타내는 그래프 개형은 $y=f(x)$이 나타내는 그래프 개형을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 함수이다(그림 2). 또 $y=f(x-1)+3$의 x절편 (C,0)에서

$$y=|f(x-1)+3|=\begin{cases} f(x-1)+3, & x \ge \mathrm{C} \\ -(f(x-1)+3), & x < \mathrm{C} \end{cases}$$

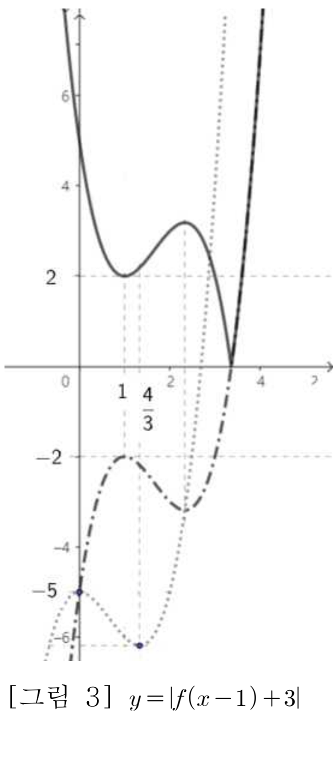
이므로 함수 $y=|f(x-1)+3|$의 그래프 개형은 (그림 3)이다. 또 $g(x)=\frac{5}{2}|f(x-1)+3|$의 그래프 개형은 (그림 4)이다.



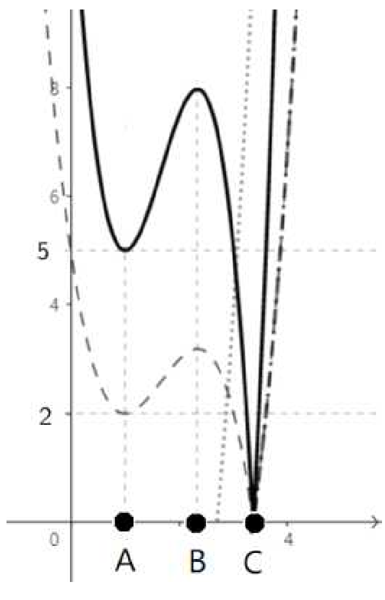
[그림 1] $y=f(x)$



[그림 2] $y=f(x-1)+3$



[그림 3] $y=|f(x-1)+3|$



[그림 4] $g(x)=\frac{5}{2}|f(x-1)+3|$

$g(x)$가 $x=$A, $x=$C에서 극솟값, $x=$B에서 극댓값을 가지므로(그림 4), $\alpha=3$이다. 또 $g(1)=\frac{5}{2}|f(0)+3|=5, g(\mathrm{C})=0$이므로 $\beta=5$이다. 따라서 $\alpha\beta=3\times5=15$이다.